ATOM

- Struktura:
  - jezgro (protoni – Np^+ i neutroni – Nn^o),
  - elektronski omotač (elektroni – Ne^-).

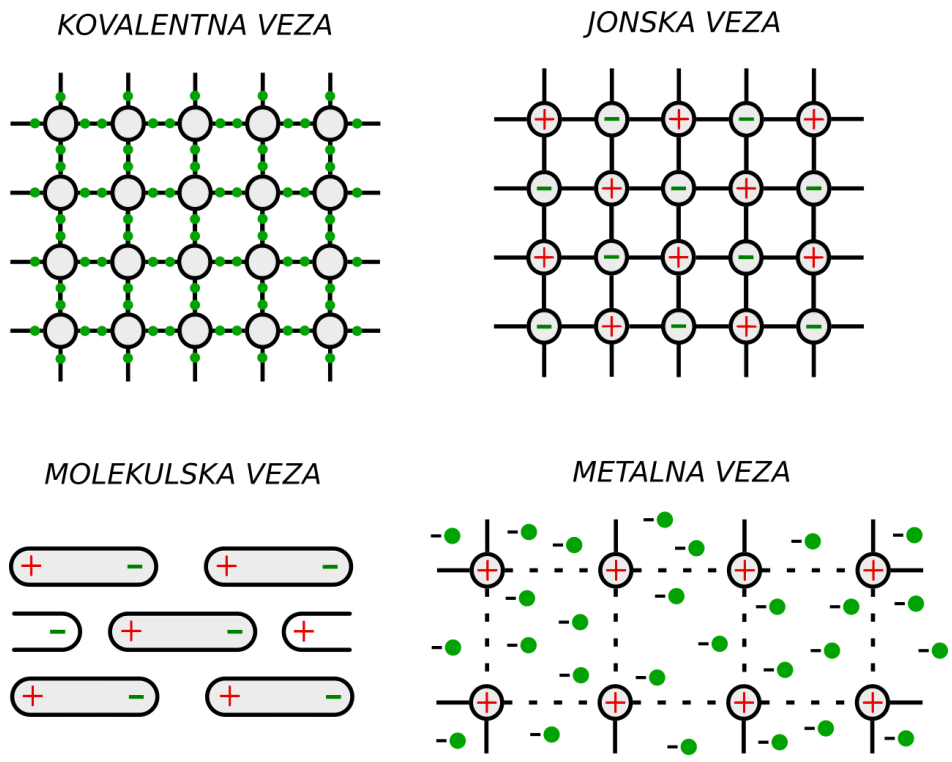
  $Np^+ = Ne^- \rightarrow$ elektroneutralnost
- Redni broj – $Z = Np^+ = Ne^-$
- Maseni broj – $A = Np^+ + Nn^o$

VALENTNI ELEKTRONI:

- elektroni u spoljašnjim nepopunjenim orbitama odnosno energetskim nivoima
- učestvuju u formiranju veza unutar materijala

VEZE U MATERIJALIMA

- Jonska – prelaz elektrona → formiranje anjona i katjona koji se elektrostatički privlače,
- Kovalentna – formiranje zajedničkih elektronskih parova (jednogube, dvogube, trogube),
- Metalna – elektronski gas oko fiksnih „+“ jona metala,
- Molekulska – tzv. Van der Waals-ove sile kod atoma inertnih gasova i molekula u kristalima.



Slika. Šematski prikaz kovalentne, jonske, molekulske i metalne veze u materijalima.

KRISTALNA STRUKTURA POLUPROVODNIKA

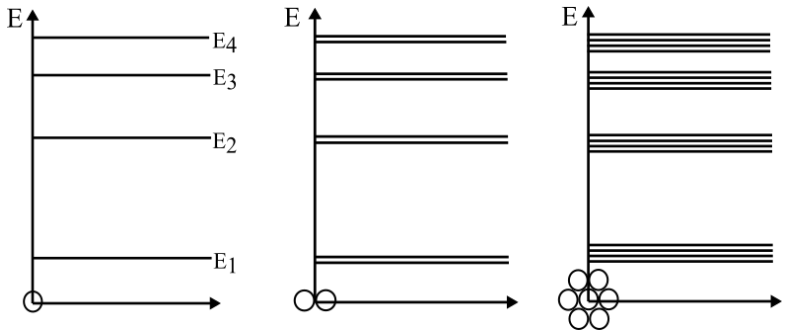
- Kovalentne veze između atoma sa strukturom tetraedra (sfalerita).
- Elementarni poluprovodnici Si, Ge... i binarni $Si_{1-x}Ge_x$.
- Poluprovodnička jedinjenja:
    - III-V tipa (GaAs, InSb,...),
    - II-VI tipa (ZnS, CdS,...).
- Si:
    - monokristalni (anizotropnost),
    - polikristalni (zrna monokristala),
    - amorfni (izotropnost).
- Monokristalni Si:
    - Uređenost kristalne rešetke
    - Jedinična ćelija – konstanta rešetke
    - Kristalografski pravci u ravni (Milerovi indeksi)
    - Defekti (1-D, 2-D i 3-D; nečistoće, dopiranje)

ČIST POLUPROVODNIK (nedopirani, sopstveni, intrinsični)

- Na $T = 0K$ svi elektroni su vezani kovalentnim vezama – nema slobodnih nosilaca naelektrisanja.
- Sa porastom temperature, valentni elektroni se oslobađaju i postaju pokretni elektroni (e^-), a za sobom ostavljaju nepokretan „+“ naelektrisan jon i upražnjenu kovalentnu vezu koja se može posmatrati kao šupljina (h^+).
- Šupljinu može popuniti neki drugi valentni elektron i stvoriti novu šupljinu, koja se dalje popunjava itd., kao da se šupljine kreću istovremeno sa elektronima.
- Stvaranje para elektron-šupljina (generacija) je praćena njihovim poništavanjem (rekombinacijom) i ove dve pojave su na određenoj temperaturi T u ravnoteži. Što je temperatura viša, izraženiji su procesi generacije i rekombinacije slobodnih nosilaca.
- Koncentracije slobodnih elektrona (n_0) i šupljina (p_0) kod čistog poluprovodnika su jednake - $n_0 = p_0 = n_i$.
- n_i – sopstvena koncentracija nosilaca ($n_i \approx (1 - 1.5) \cdot 10^{10}\text{cm}^{-3}$ za Si).
- Defekti u kristalnoj rešetki pomažu procesima generacije i rekombinacije nosilaca.

ENERGETSKE ZONE

- 1 atom – diskretni energetski nivoi a između njih energetski procepi.
- 2 atoma – cepanje na 2 energetska podnivoa.
- Više atoma – cepanje energetskih nivoa na veliki broj podnivoa koji su gusto raspoređeni i čine energetske zone između kojih su energetski procepi (zabranjene zone).



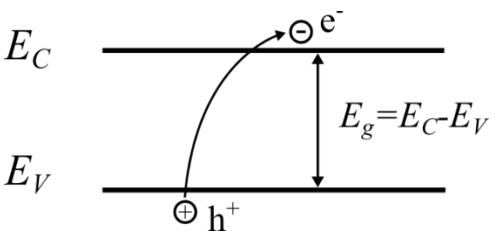
Slika . Energetski nivoi kod jednog, dva i više atoma.

- U poluprovodnicima najviše energetske zone su provodna zona koja je skoro prazna (sadrži samo n_0) i valentna zona koja je skoro popunjena vezanim valentnim elektronima (sadrži p_0).
- Između zona je energetski procep (zabranjena zona E_g). Unutar nje su energije koje elektroni ne mogu da imaju, odnosno energetska stanja koja ne mogu da budu popunjena $E_g(\mathrm{S_i}) = 1.12eV$, $E_g(\mathrm{G_e}) = 0.66eV$, $E_g(\mathrm{G_aA_s}) = 1.42eV$.
- E_g zavisi od temperature T:

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T+\beta}\ (eV)\,,$$

gde je temperatura izražena u Kelvinima, $T(K)$, a α i β su konstante karakteristične za svaki materijal.

- Podela materijala prema širini E_g odnosno prema električnoj provodnosti:
  - metali (preklapanje provodne i valentne zone),
  - poluprovodnici,
  - izolatori (dielektrici) $E_g \geq 3eV$.
- Generisanje slobodnih nosilaca (para elektron-šupljina) → prelaz valentnog elektrona iz valentne u provodnu zonu. Slobodni nosioci su pokretni i omogućavaju proticanje električne struje.

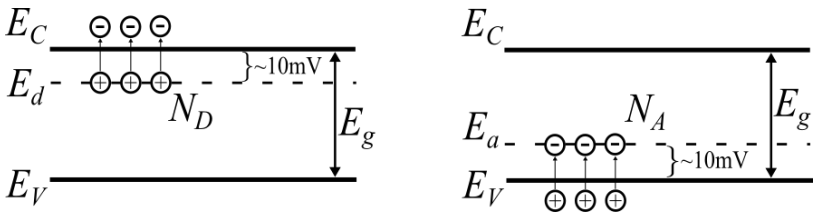


Slika . Generisanje para elektron-šupljina.

PRIMESNI POLUPROVODNICI

- Dodavanjem primesa (dopanata) menja se provodnost poluprovodnika (koncentracije primesa $10^{14} - 10^{20}\mathrm{cm}^{-3}$).
- Primese se ugrađuju u kristalnu rešetku umesto osnovnih atoma.
- N-tip – dodaju se donorske (petovalentne) primese koje imaju jedan valentni elektron više i daju te elektrone kao većinske nosioce naelektrisanja (P, As, Sb) – N_D.

- P-tip – dodaju se akceptorske (trovalentne) primese koje imaju jedan valentni elektron manje i daju šupljine kao većinske nosioce naelektrisanja (Ga, In, Al) – N_A.
- Primese u energetski procep unose primesne energetske nivoe: donorski E_d i akceptorski E_a.



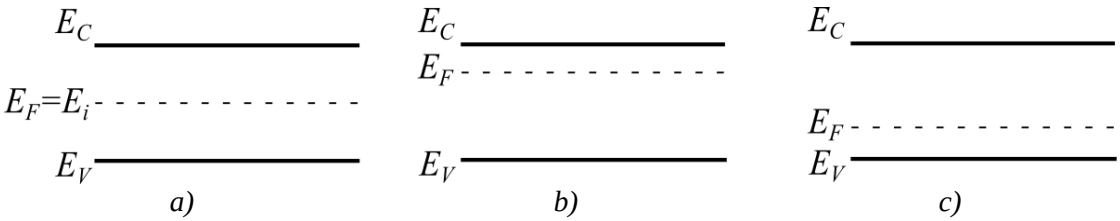
a) *b)*

Slika . Primesni energetski nivoi: a) donorski E_d i b) akceptorski E_a.

- Jako dopirani (degenerisani) poluprovodnik je onaj kod koga su koncentracije primesa veće od $10^{17}\mathrm{cm}^{-3}$.

FERMIJEV NIVO I FERMI-DIRAKOVA RASPODELA

- Fermijev nivo (E_F) kod metala predstavlja najviši energetski nivo koji je popunjen elektronima na $T = 0K$.
- U kristalu poluprovodnika odražava ravnotežu ukupnog „+“ i „-“ naelektrisanja.
- E_F je kontinualan na spoju dva poluprovodika ili poluprovodnika i metala.
- U sopstvenom poluprovodniku E_F je približno na sredini E_g i označava se sa E_i (i-intrinsic).
- U primesnom poluprovodniku E_F se pomera ka zoni sa većom koncentracijom slobodnih nosilaca da bi se održala ravnoteža.

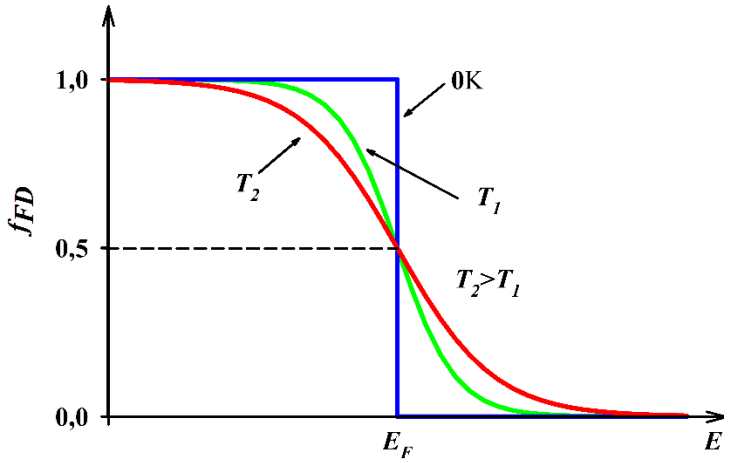


a) *b)* *c)*

Slika . Energetske zone i Fermijev nivo kod: a) sopstvenog, b) n-tipa i c) p-tipa poluprovodnika.

- **Fermi-Dirak-ova funkcija raspodele** pokazuje verovatnoću da energetski nivo sa energijom E bude zauzet elektronom na temperaturi T :

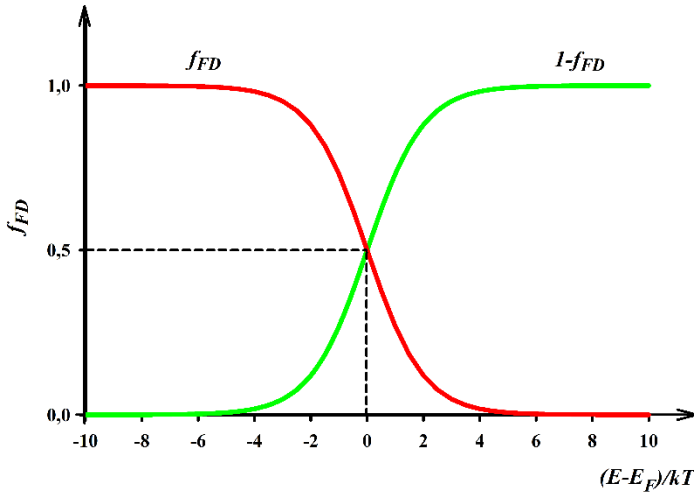
$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_f}{kT}}}.$$



Slika . Fermi-Dirakova funkcija raspodele za različite vrednosti temperature.

- Na $T = 0K$ sva energetska stanja do E_F su popunjena a iznad E_F su prazna.
- Sa porastom temperature deo stanja ispod E_F se prazni a popunjava deo iznad E_F.
- Verovatnoća da se elektron nađe na E_F je $1/2$ na svim temperaturama.
- Fermi-Dirak-ova funkcija za šupljine je verovatnoća da se elektron ne nađe na energetskom nivou E:

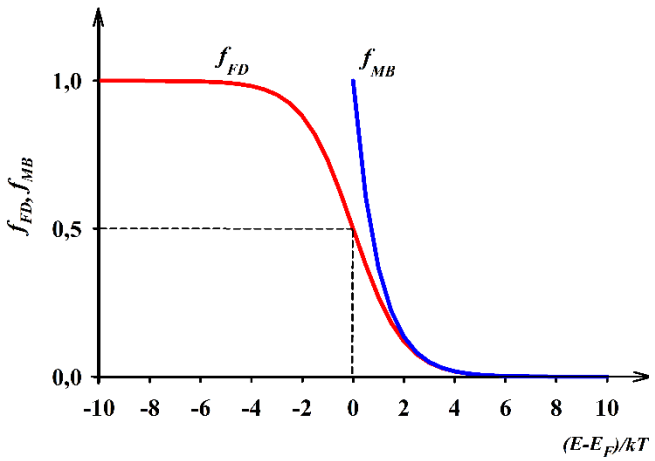
$$f_{FD(h^+)} = 1 - f_{FD(e^-)} = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_f}{kT}}}.$$



Slika . Fermi-Dirakova funkcija raspodele za elektrone (puna linija) i za šupljine (isprekidana linija).

- Za $E - E_f \geq 3kT$, odnosno, za energetske nivoe daleko od E_F, Fermi-Dirak-ova raspodela se može aproksimirati Maksvel-Bolcman-ovom raspodelom:

$$f_{FD} \to f_{MB} = e^{-\frac{E-E_f}{kT}}.$$



Slika . Aproksimacija Fermi-Dirakove raspodele Maksvel-Bolcmanovom raspodelom.

DUALNA PRIRODA ELEKTRONA

- Elektron poseduje dualnu prirodu: **čestičnu** (korpuskulatornu) i **talasnu.**
  - Čestica:

    $\boldsymbol{E_k} = \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{m\vartheta^2}{2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{\overset{p}{\widehat{(m\vartheta)}}^2}{2m} = \boldsymbol{\frac{p^2}{2m}}$ - kinetička energija

    $p -$ impuls čestice

  - Talas:

    $E = h \cdot \nu = h\frac{c}{\lambda}$

    h – Plankova konstanta

    ν – frekvenca talasa

    c – brzina svetlosti

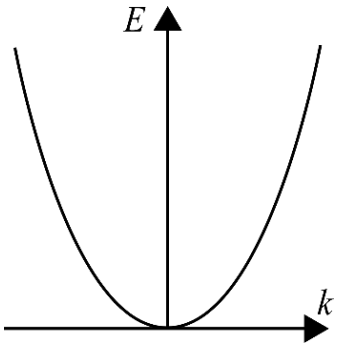
    λ – talasna dužina

    $$\boldsymbol{p} = \frac{h}{\lambda} = \frac{\overset{\hbar}{\widehat{h}}}{2\pi} \cdot \frac{\overset{k}{\widehat{2\pi}}}{\lambda} = \hbar \cdot \boldsymbol{k}$$

    $h, \hbar$ – Plankova konstanta

    k – talasni broj

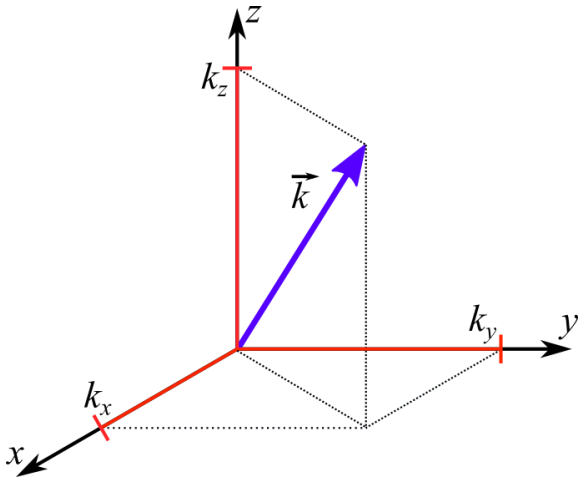
    $\boldsymbol{E_k} = \frac{\hbar^2}{\boldsymbol{2m}}\boldsymbol{k^2} = \boldsymbol{\text{const} \cdot k^2} \leftarrow$ parabolična zavisnost



Slika . Parabolična zavisnost energije slobodnog elektrona od talasnog broja k.

- Za čestice u prostoru definiše se opšti izraz:
  $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$,
  $\vec{k}\ (k_x, k_y, k_z)$ gde je:

  $\vec{k}$ – talasni vektor
  k_x, k_y, k_z – projekcije talasnog vektora na površinu na koju talas nailazi



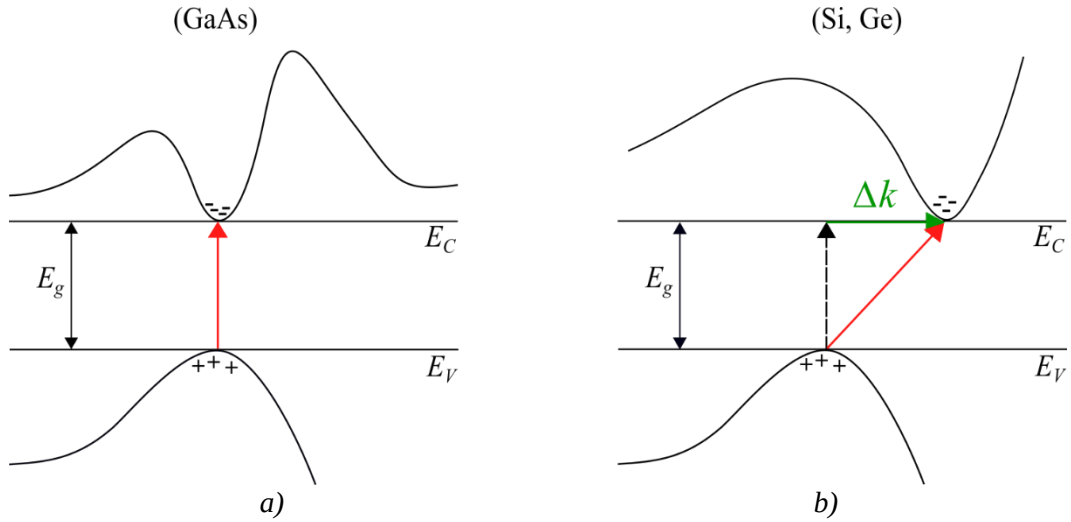
Slika . Projekcije talasnog vektora $\vec{k}$.

- Veza energije elektrona sa talasnim vektorom $\vec{k}$ se naziva de Broljeva relacija. De Broljeve relacije važe za sve čestice.
- Intenzitet de Broljevih talasa na bilo kom mestu u prostoru definiše **verovatnoću nalaženja elektrona** na tom mestu.

$E(k)$ ZAVISNOSTI

- Kretanje elektrona (čestica) se opšte opisuje talasnom funkcijom $\psi = f(x, y, z, t, k)$ i takozvanom Šredingerovom jednačinom (diferencijalna jednačina drugog reda).
- Za čestice u kristalu rešenje Šredingerove jednačine je složeno, a fizički smisao ima samo $|\psi|^2$ koji daje verovatnoću nalaženja čestice u kristalu.
- Iz talasne funkcije se za kristal izvode tzv. $E(k)$ zavisnosti za čestice. One su složene funkcije talasnog vektora $\vec{k}$ u prostoru.

- $E(k)$ zavisnosti imaju više minimuma za elektrone, odnosno maksimuma za šupljine, za svaku orbitu.
- **Apsolutni minimum** $E(k)$ zavisnosti za elektrone predstavlja **dno provodne zone**, a **apsolutni maksimum** za šupljine predstavlja **vrh valentne zone**.
- Prelaz elektrona iz valentne u provodnu zonu (generacija nosilaca) može biti **direktan** ili **indirektan** u zavisnosti od toga da li dolazi do promene talasnog vektora $\vec{k}$. Time se razlikuju i poluprovodnici sa direktnim i indirektnim energetskim procepom.



Slika . Prelaz elektrona iz valentne u provodnu zonu kod materijala može biti: a) direktan i b) indirektan.

- Analogno**, ukupna promena energije** elektrona pri rekombinaciji jednaka je **zbiru energije zračenja** ($h\nu$ – energija fotona) koje se emituje u vidu svetlosti (ili IC, UV) **i promeni impulsa** ($\Delta p = \hbar \cdot \Delta k$) koja se predaje rešetki u vidu toplote (energija fonona):

$$\Delta E = \Delta E_{fotona} + \Delta E_{fonona}.$$

EFEKTIVNE (PRIVIDNE) MASE

- Da bi se ponašanje elektrona (šupljina) u kristalu opisalo istim zakonima kao za slobodne čestice uvodi se pojam efektivnih masa (m_n^* i m_p^*) :

$$\frac{1}{m_{n,p}{}^*} = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{d^2E_{C,V}(k)}{dk^2}\right)\Bigg|_{k=k_0},$$

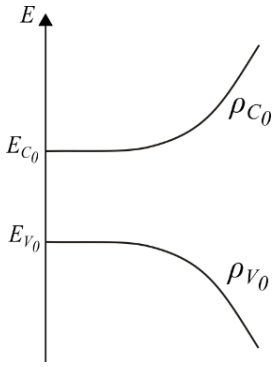
  gde je $k = k_0$ mesto minimuma (maksimuma) $E(k)$ zavisnosti.

- Kristali su anizotropni te je i kretanje elektrona kroz njih različito duž različitih pravaca (postoje m_x^*, m_y^* i m_z^*).
- Kada postoji više maksimuma $E(k)$ zavisnosti za isto k_0 u valentnoj zoni razlikuju se **lake** i **teške šupljine**.
- Za Si : $m_n^* = 1.08 \cdot m_e$, $m_p^* = 0.88 \cdot m_e$, gde je m_e masa elektrona i iznosi $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.

KONCENTRACIJE SLOBODNIH NOSILACA

- Broj mogućih stanja koje može da zauzme elektron (šupljina) po jedinici energije – **energetska gustina stanja** (Density of States – DOS):

$$\rho_{Co}(E) \sim \sqrt{E - E_{Co}},$$
$$\rho_{Vo}(E) \sim \sqrt{E_{Vo} - E}.$$

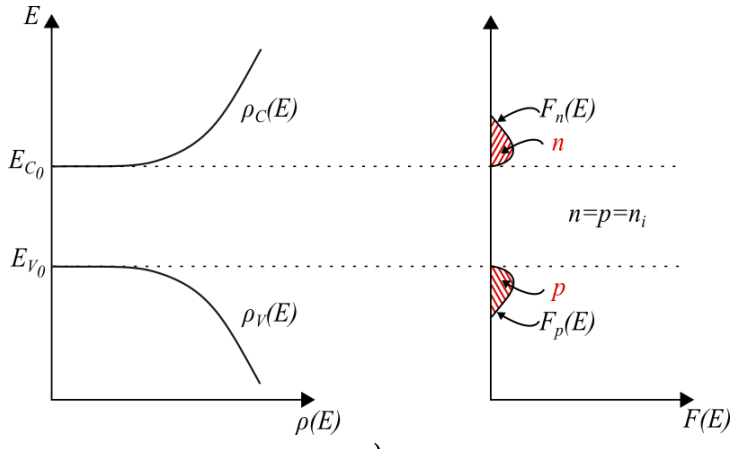


Slika . Energetske gustine stanja elektrona i šupljina u provodnoj, odnosno valentnoj zoni.

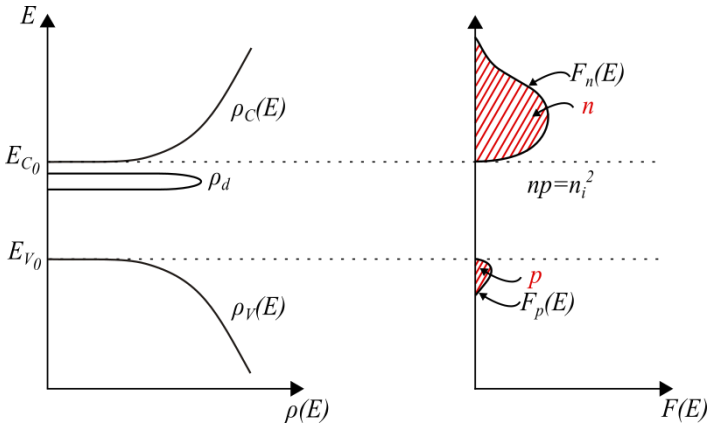
- **Verovatnoća zauzetosti stanja:**
  - za elektrone: $f_{FD}(E)$,
  - za šupljine: $1 - f_{FD}(E)$.

- **Verovatnoća koncentracije nosilaca:**
  - za elektrone: $F_n(E) = \rho_{Co}(E) \cdot f_{FD}(E)$,
  - za šupljine: $F_p(E) = \rho_{Vo}(E) \cdot (1 - f_{FD}(E))$.

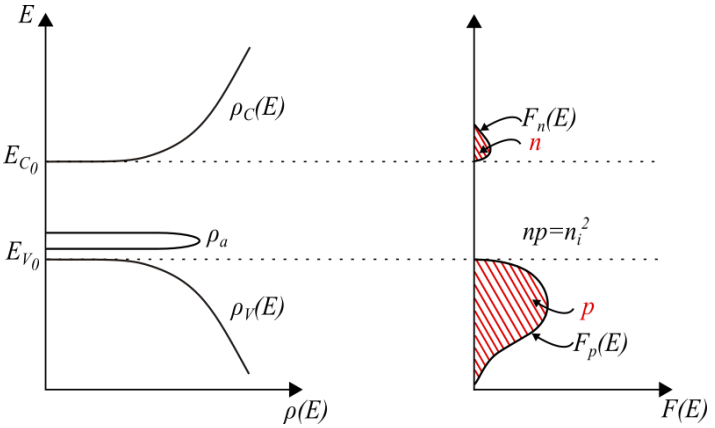
- **Koncentracija nosilaca u opsegu dozvoljenih energija:**
  - za elektrone: $n = \int_{E_{Co}}^{\infty} \rho_{Co}(E) \cdot f_{FD}(E)\ dE = \int_{E_{Co}}^{\infty} F_n(E)\ dE$,
  - za šupljine: $p = \int_{-\infty}^{E_{Vo}} \rho_{Vo}(E) \cdot \left(1 - f_{FD}(E)\right)\ dE = \int_{-\infty}^{E_{Vo}} F_p(E)\ dE$.



a)



b)



c)

Slika . Dijagrami gustine stanja i verovatnoće koncentracije nosilaca naelektrisanja u: a) sopstvenom poluprovodniku, b) poluprovodniku n-tipa i c) poluprovodniku p-tipa.

SLABO I UMERENO DOPIRANI POLUPROVODNIK

- Kada je E_F udaljen od granica zona, za koncentraciju elektrona u provodnoj i koncentraciju šupljina u valentnoj zoni mogu se koristiti izrazi bazirani na Maksvel-Bolcman-ovoj raspodeli:

$$f_{FD}(E) \to f_{MB}(E) \Rightarrow$$

$$n = N_C \cdot e^{-\frac{E_c - E_f}{k\,T}}$$
$$p = N_V \cdot e^{-\frac{E_f - E_v}{k\,T}}$$

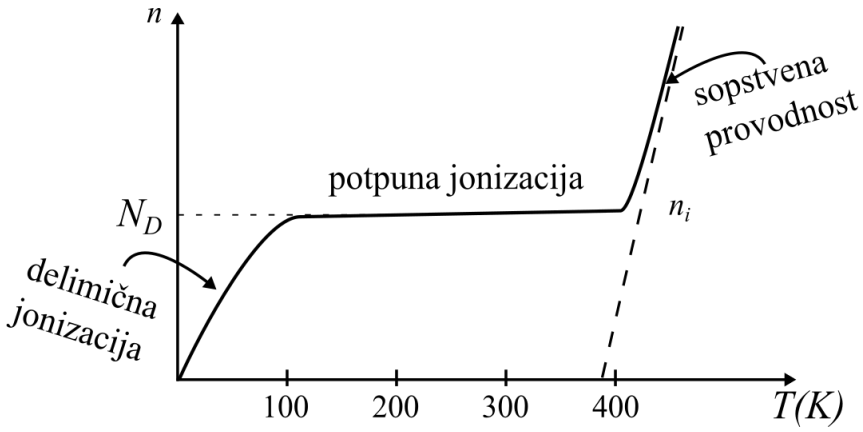
$$N_C = 2\left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2}\right)^{3/2} = N_C(300K)\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2} = 2.8 \cdot 10^{19}\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2}\ \text{cm}^{-3}$$
$$N_V = 2\left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2}\right)^{3/2} = N_V(300K)\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2} = 1.08 \cdot 10^{19}\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2}\ \text{cm}^{-3}$$

gde su:
N_C – efektivni broj stanja sveden na dno provodne zone,
N_V – efektivni broj stanja sveden na vrh valentne zone,
m_n^*, m_p^* – efektivne mase gustine stanja elektrona i šupljina,
k – Bolcmanova konstanta,
T– temperatura.

- U dopiranom poluprovodniku:

$$n \cdot p = {n_i}^2 = N_C \cdot N_V \cdot e^{-\frac{E_g}{k\,T}}.$$

- U dopiranom poluprovodniku sa obe vrste primesa položaj E_F i koncentracije nosilaca zavise od N_D, N_A i T.
- Kompenzovani poluprovodnik je poluprovodnik dopiran sa obe vrste primesa bliskih koncentracija. Ukoliko je $N_D = N_A$ smatra se da je poluprovodnik potpuno kompenzovan
- U dopiranom poluprovodniku koncentracija elektrona u provodnoj zoni (ujedno i koncentracija jonizovanih donora ${N_D}^+$) kao i koncentracija šupljina u valentnoj zoni (i koncentracija jonizovanih akceptora ${N_A}^-$) zavisi od temperature T.
- Na niskim temperaturama nisu sve primese jonizovane već njihova koncentracija raste sa porastom temperature.
- Za temperature veće od $100K$, smatra se da su sve primese jonizovane i važi $n = N_D$ odnosno $p = N_A$.
- Iznad temperature $T \approx 400K$ počinje prelazak nosilaca iz valentne u provodnu zonu i poluprovodnik počinje da se ponaša kao sopstveni poluprovodnik $n = p = n_i$.



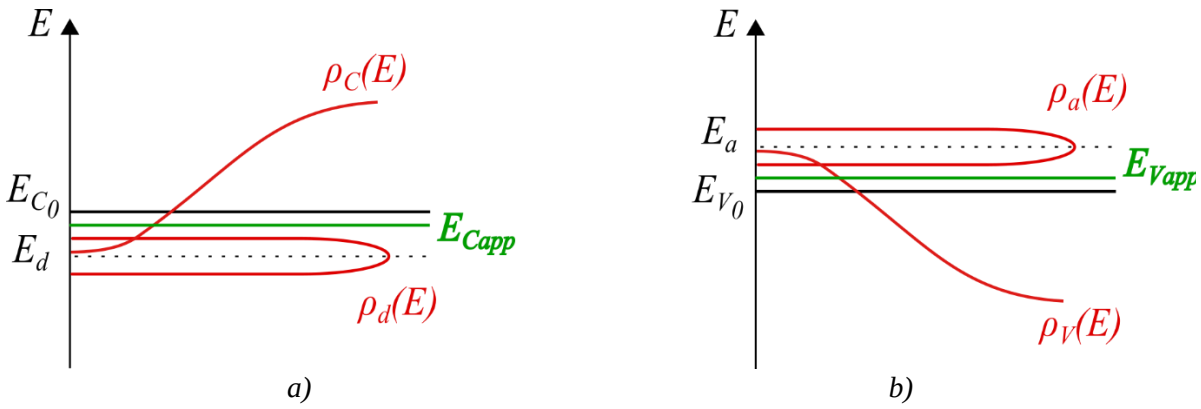
Slika . Koncentracija provodnih elektrona u n-tipu poluprovodnika u zavisnosti od temperature.

U sopstvenom poluprovodniku, $n_0 = p_0 = n_i \rightarrow E_F$ na sredini zabranjene zone.

U dopiranom poluprovodniku, $n \cdot p = {n_i}^2 \rightarrow E_F$ se pomera ka odgovarajućoj granici zone.

JAKO DOPIRANI POLUPROVODNIK

- Kod **jako dopiranih** poluprovodnika zbog velikog broja atoma primesa $E_d(E_a)$ nivo se širi u primesnu zonu, a funkcije gustine stanja gube parabolični oblik – dobijaju repove koji zadiru u E_g.



Slika . Prividno dno provodne i prividan vrh valentne zone u jako dopiranom poluprovodniku.

- **Prividno dno provodne**, odnosno, **vrh valentne zone** (E_{Capp}, E_{Vapp}) omogućavaju da se koriste isti izrazi kao i za slabo dopirani poluprovodnik:

$$n^+ = N_C \cdot e^{-\frac{E_{Capp}-E_f}{k\,T}},$$
$$p^+ = N_V \cdot e^{-\frac{E_f-E_{Vapp}}{k\,T}}.$$

- Prividno dno provodne i vrh valentne zone definišu suženi energetski procep odnosno postoji prividno suženje zabranjene zone ΔE_{gapp}:

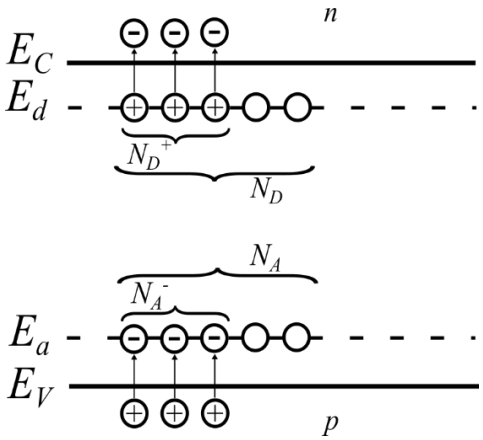
$$E_g = E_{g0} - \Delta E_{gapp}.$$

DELIMIČNA JONIZACIJA PRIMESA

- Na niskim temperaturama u uslovima delimične jonizacije primesa ${N_D}^+ < N_D$ i ${N_A}^- < N_A$ uvek važi jednačina elektroneutralnosti:

$$\sum(+) = \sum(-)\,.$$

- Na temperaturi $T = 0K$, svi primesni atomi sadrže valentne elektrone.
- Sa porastom temperature T, elektroni dobijaju energiju da prelaze sa primesnog donorskog nivoa u provodnu zonu (primese se jonizuju – ${N_D}^+$) odnosno, da elektroni iz valentne zone pređu na akceptorski nivo (${N_A}^-$).



Slika . Delimična jonizacija primesa.

$$p + {N_D}^+ = n + {N_A}^- .$$

${N_D}^+$– zavisi od tipa primesa (položaja E_d) i temperature T,
${N_A}^-$ – zavisi od položaja E_a i temperature T.

- Kod potpune jonizacije ($T \geq 100K$) važi:

$$N_D = {N_D}^+ , \qquad N_A = {N_A}^- , \qquad n \cdot p = {n_i}^2$$

$$\frac{{n_i}^2}{n} + N_D = n + N_A \;\Big/ * n ,$$

$$n^2 + (N_A - N_D)n - {n_i}^2 = 0 ,$$

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + {n_i}^2} , \qquad p = \frac{{n_i}^2}{n} .$$

DRIFT NOSILACA NAELEKTRISANJA

- **Bez dejstva spoljašnjeg električnog polja nosioci se kreću haotično** usled termičke energije. Kretanje nosilaca između dva sudara sa fononima (joni u kristalnoj rešetki koji vibriraju oko ravnotežnog položaja) je pravolinijsko. Joni mogu da budu od osnovnih atoma poluprovodnika ili joni primesa.
- Na sobnoj temperaturi, brzine između dva sudara su u proseku reda $10^7 \mathrm{cm/s}$, a srednje vreme između dva sudara $10^{-12} \div 10^{-11}$ s.
- **Pod dejstvom električnog polja nosioci se kreću usmereno** (elektron suprotno od smera polja, a šupljina u smeru polja) i ovo kretanje je **driftovsko** kretanje.
- **Driftovska brzina** je proporcionalna jačini električnog polja $K(\mathrm{cm/s})$.

$$\vartheta_{ndrift} = \mu_n \cdot K ,$$
$$\vartheta_{pdrift} = \mu_p \cdot K ,$$

$$K = \frac{V}{l},$$

V – primenjeni napon,
l – dužina uzorka,
μ_n – pokretljivost elektrona (cm^2/Vs),
μ_p – pokretljivost šupljina (cm^2/Vs).

$$\mu_{n,p} = \frac{e \cdot \tau}{m_{n,p}{}^*},$$

gde je e elementarno naelektrisanje elektrona.

- Pokretljivost zavisi od srednjeg vremena između dva sudara (τ) i efektivne mase ($m_{n,p}{}^*$), odnosno vrste materijala kroz koji se nosioci kreću.
- Pokretljivost šupljina je manja od pokretljivosti elektrona.
- Driftovska brzina pri **jakim poljima** ulazi u **zasićenje**.
- Pokretljivost nosilaca naelektrisanja jako zavisi od temperature T i koncentracije primesa (N_D, N_A).
  $T \rightarrow$ fononi – oscilacije
  N_D, $N_A \rightarrow$ jonizovane primese
- Sudari → **proces rasejanja nosilaca.**
- N_D, $N_A \nearrow$ – pokretljivost i driftovska brzina opadaju zbog porasta rasejanja.
- U **sopstvenom i slabo dopiranom** poluprovodniku sa porastom temperature T pokretljivost se smanjuje zbog većeg **rasejanja na fononima**.
- Kod **umereno i jako dopiranog** poluprovodnika istovremeno postoji **rasejanje na primesama** i **rasejanje na fononima.** Oba efekta zavise od temperature.
  - Na temperaturama manjim od sobne dominira efekat rasejanja na primesama, pa se sa snižavanjem temperature pokretljivost smanjuje usled dužeg zadržavanja naelektrisanih čestica (elektrona i šupljina) u okolini jonizovanih primesa.
  - Na temperaturama višim od sobne pokretljivost opada usled dominantnog efekta rasejanja na fononima.
- Pokretljivost manjinskih nosilaca je manja od pokretljivosti većinskih nosilaca.

SPECIFIČNA PROVODNOST POLUPROVODNIKA

- Specifična električna provodnost poluprovodnika (σ):

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p = e(n\mu_n + p\mu_p).$$

- U sopstvenom poluprovodniku, $n = p = n_i$, pa je:

$$\sigma = en_i(\mu_n + \mu_p).$$

- Specifična električna otpornost poluprovodnika (ρ):

$$\rho = \frac{1}{\sigma}.$$

DRIFTOVSKA STRUJA

- Posledica driftovskog kretanja nosilaca.
- Gustina driftovske struje $J_{n,p\ drift}$ je srazmerna jačini primenjenog električnog polja:

$$J_{ndrift} = en\vartheta_{ndrift} = en\mu_n K\ ,$$
$$J_{pdrift} = ep\vartheta_{pdrift} = ep\mu_p K\ .$$

- Ukupna struja drifta:

$$J = J_{ndrift} + J_{pdrift} = \overbrace{e(n\mu_n + p\mu_p)}^{\sigma} K = \sigma \cdot K\ .$$

DIFUZIONO KRETANJE ČESTICA

- Nastaje usled kretanja čestica sa mesta veće koncentracije ka mestu manje koncentracije, sa težnjom njihovog izjednačavanja.
- Posledica ovog kretanja je difuziona struja J_{ndiff} i J_{pdiff}.
- Gradijent koncentracije (brzina porasta ili smanjenja koncentracije) definiše gustinu difuzione struje:

$$J_{ndiff} = eD_n \frac{dn}{dx},$$
$$J_{pdiff} = -eD_p \frac{dp}{dx},$$

jednodimenziono kretanje

gde su $D_{n,p}$ difuzione konstante elekrona (šupljina).

$$J_{diff} = J_{ndiff} + J_{pdiff}\ .$$

AJNŠTAJNOVA RELACIJA

- Povezuje difuzione konstante i pokretljivosti nosilaca:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q} = U_T,$$
$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{q} = U_T,$$

termički potencijal
$U_T(300K) \approx 26\text{mV}$

- Važi za slabo i umereno dopirani poluprovodnik i jako dopirani poluprovodnik sa konstantnom koncentracijom primesa.

TRANSPORTNE JEDNAČINE U POLUPROVODNIKU

- Kada u poluprovodniku postoji električno polje i gradijent koncentracije nosilaca, ukupna gustina struje jednaka je zbiru driftovske i difuzione komponente:

$$J = J_{drift} + J_{diff}\ ; \qquad I = J \cdot S \text{ (} S \text{ – poprečni presek)}$$

$$J_{drift} = e\left(n\mu_n + p\mu_p\right)K\ ,$$

$$J_{diff} = eD_n\frac{dn}{dx} - eD_p\frac{dp}{dx},$$

- Transportne jednačine daju gustine struja elektrona i šupljina:

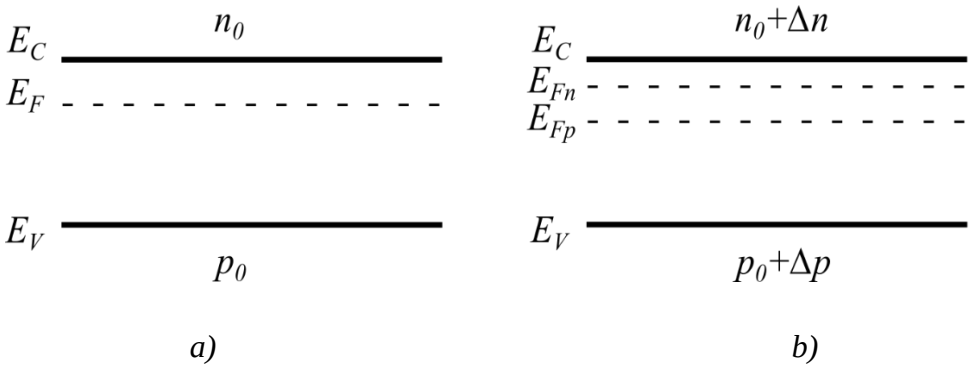
$$J_n = J_{ndrift} + J_{ndiff} = en\mu_n K + eD_n\frac{dn}{dx},$$
$$J_p = J_{pdrift} + J_{pdiff} = ep\mu_p K - eD_p\frac{dp}{dx}.$$

KVAZI-FERMIJEVI NIVOI

- Koncentracije elektrona i šupljina u ravnoteži su n_0 i p_0 i njima odgovara ravnotežni nivo E_F.
- Ako se koncentracije elektrona i šupljina povećaju (generacijom pri osvetljivanju, injekcijom...) odnosno, stvore se natkoncentracije Δn i Δp, poluprovodnik više nije u ravnoteži i važi:

$$n = n_0 + \Delta n \quad \text{i} \quad p = p_0 + \Delta p.$$

- Da bi se koristili isti izrazi kao za poluprovodnik u ravnoteži uvode se kvazi-Fermijevi nivoi.
- Porast $n_0 \to n$ teži da približi E_F ka E_C, a porast $p_0 \to p$ teži da približi E_F ka E_V.



Slika . a) Fermijev nivo u ravnoteži u n-tipu polupovodnika i b) Kvazi-Fermijev nivoi pri generisanju natkoncentracije nosilaca.

- Fermijev nivo se „cepa“ na kvazi-Fermijeve nivoe i koriste se relacije:

$$n = n_0 + \Delta n = N_C \cdot e^{-\frac{E_C - E_{Fn}}{kT}} = n_0\, e^{\frac{E_{Fn} - E_F}{kT}},$$

$$p = p_0 + \Delta p = N_V \cdot e^{-\frac{E_{Fp} - E_V}{kT}} = p_0\, e^{\frac{E_F - E_{Fp}}{kT}}.$$

- Preko kvazi-Fermijevih nivoa transportne jednačine mogu da se napišu u obliku:

$$J_n = \mu_n n \frac{dE_{Fn}}{dx},$$

$$J_p = \mu_p p \frac{dE_{Fp}}{dx}.$$

REKOMBINACIJA NOSILACA

- Pri određenoj temperaturi T, u poluprovodniku procesi stvaranja i poništavanja slobodnih nosilaca su u ravnoteži. Poništavanje para elektron-šupljina **(anihilacija)** predstavlja rekombinaciju u poluprovodniku. Generacija i rekombinacija su u ravnoteži.
- Generacija:
  - prelaskom elektrona iz valentne u provodnu zonu,
  - jonizacijom primesa.
- Rekombinacija:
  - emisiona – prelazak elektrona iz provodne u valentnu zonu pri čemu dolazi do emitovanja fotona,
  - Ožeova – dolazi do predaje energije drugim nosiocima,
  - SRH (Šokli-Rid-Hol) rekombinacija – preko rekombinacionih centara čiji se energetski nivoi nalaze unutar E_G.
- Efikasni rekombinacioni centri su oni čiji je energetski nivo na sredini E_G. Atomi metala se uvode kako bi se skratilo vreme života manjinskih nosilaca i oni se brže uklonili iz komponente kad se isključi napajanje. Ovime se povećava granična frekvenca rada komponente (primer: Au).
- Brzina rekombinacije manjinskih nosilaca pri malim natkoncentracijama ($\Delta n, \Delta p \ll n_0, p_0$):

$$U_n = \frac{n - n_0}{\tau_n} = \frac{\Delta n}{\tau_n},$$

$$U_p = \frac{p - p_0}{\tau_p} = \frac{\Delta p}{\tau_p},$$

gde su τ_n i τ_p vremena života elektrona, odnosno šupljina kao manjinskih nosilaca.

JEDNAČINA KONTINUITETA

- Opisuje promenu generisane natkoncentracije manjinskih nosilaca ($\Delta n, \Delta p$) u poluprovodniku sa vremenom:

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = G_n - U_n + \frac{1}{e}\frac{dJ_n}{dx} = G_n - \frac{\Delta n}{\tau_n} + \frac{1}{e}\frac{dJ_n}{dx},$$

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = G_p - U_p - \frac{1}{e}\frac{dJ_p}{dx} = G_p - \frac{\Delta p}{\tau_p} - \frac{1}{e}\frac{dJ_p}{dx}$$

gde su G_n i G_p brzine generacije nosilaca.

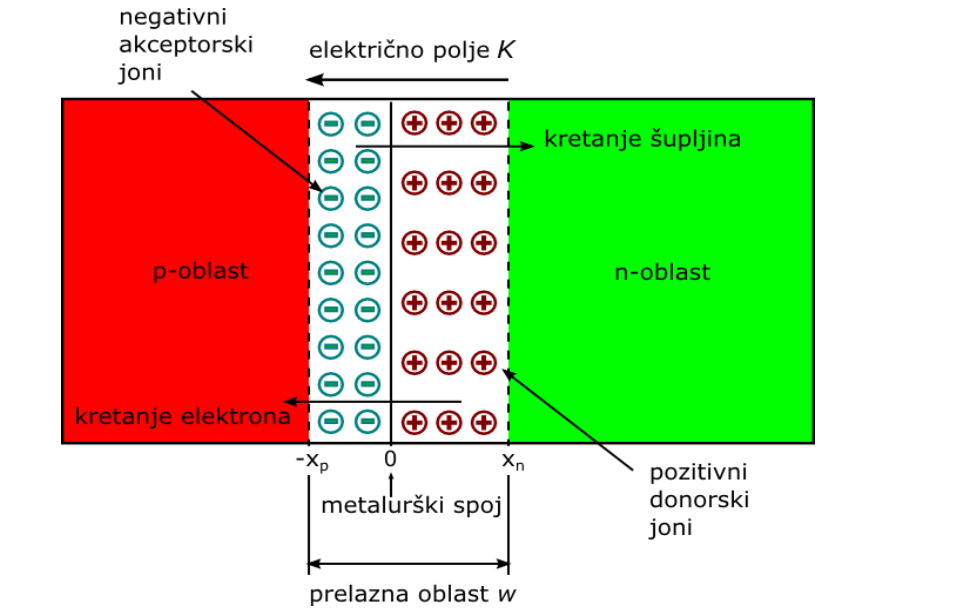
- Pretpostavke: nizak nivo injekcije i konstantno električno polje u poluprovodniku.

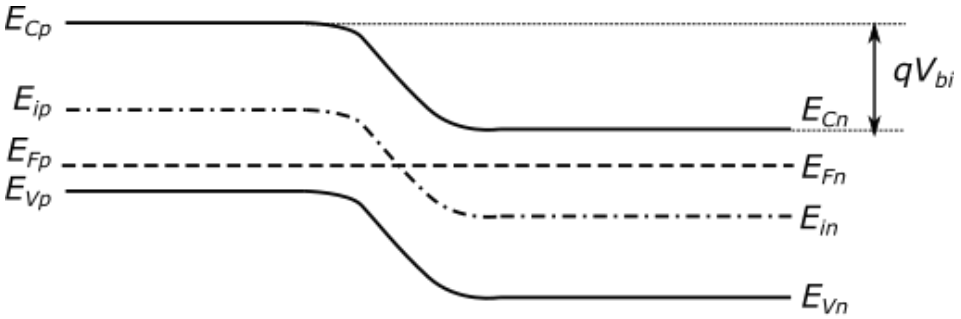
P-N SPOJ

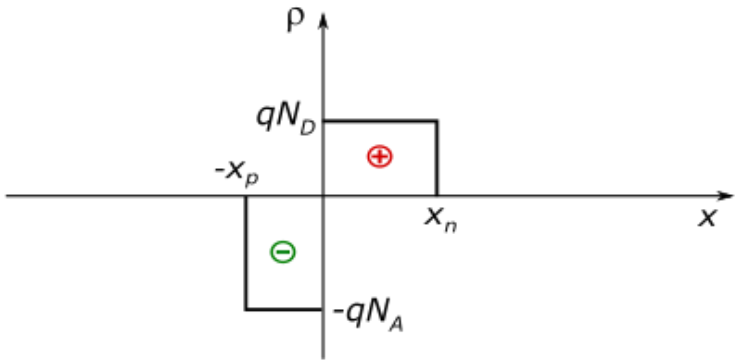
- **Bliski kontakt** poluprovodnika **p-tipa** sa koncentracijom primesa N_A i poluprovodnika **n-tipa** sa koncentracijom primesa N_D.
- Obično je jedna strana visoko dopirana (p^+-n ili n^+-p spoj), a sam prelaz je **skokovit** odnosno **strm** (nagla promena koncentracije primesa između p i n strane) **ili linearan** (postepena promena koncentracije primesa između p i n strane) u zavisnosti od realizacije.
- **Zamišljena granica** između 2 tipa poluprovodnika naziva se **metalurški spoj.**
- Oko metalurškog spoja obostrano dolazi do **difuzije većinskih nosilaca naelektrisanja** sa jedne strane spoja na drugu i njihove rekombinacije do uspostavljanja ravnoteže - postoji $\boldsymbol{I_{diff}}$.
- Kao posledica **ostaju nekompenzovani joni primesa** u tzv. **prelaznoj oblasti** (oblast osiromašenja, barijerna oblasti, oblast prostornog naelektrisanja).
- U prelaznoj oblasti nema slobodnih nosilaca, ali postoji električno polje koje se naziva **ugrađeno električno polje.**
- Unutar n- i p- oblasti postoji **termalna generacija** slobodnih nosilaca. Deo generisanih manjinskih nosilaca koji se nalaze uz prelaznu oblast prevlači električno polje i oni čine **driftovsku struju** ($\boldsymbol{I_{drift}}$).
- p-n spoj ulazi u termičku **ravnotežu** kada postane

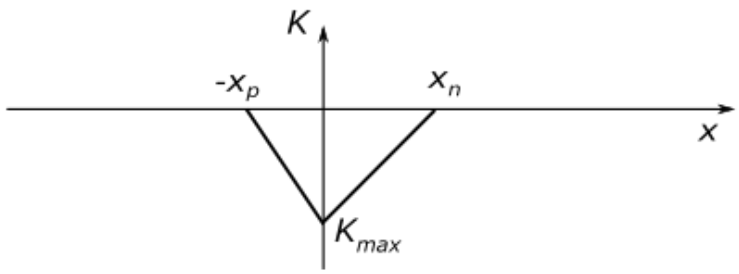
$$I_{diff} = I_{drift}$$

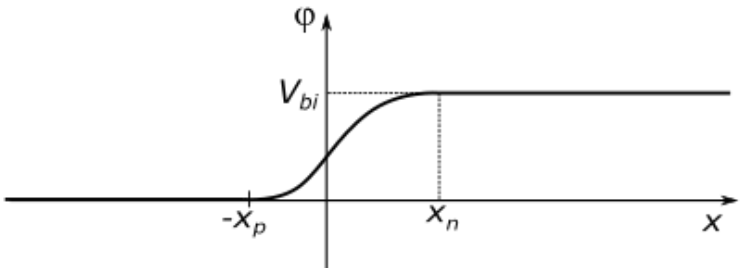
- U ravnotežnom stanju Fermijev nivo ima konstantnu vrednost unutar p-n spoja, odnosno važi $E_{Fp}=E_{Fn}$. U prelaznoj oblasti postoji promena granica provodne i valentne zone i na njenim ivicama ona je proporcionalna vrednosti ugrađenog napona.
- **Širina prelazne oblasti** – w, **ugrađeno električno polje** – K, tj. **ugrađeni napon na prelaznoj oblasti** - V_{bi} zavise od tipa poluprovodnika, koncentracije primesa u n i p oblastima (N_D i N_A) i temperature.


negativni
akceptorski
joni
električno polje K
kretanje šupljina
p-oblast
n-oblast
kretanje elektrona
-xp
0
xn
pozitivni
donorski
joni
metalurški spoj
prelazna oblast w


ECp
Eip
EFp
EVp
qVbi
ECn
EFn
Ein
EVn


ρ
qND
-xp
xn
x
-qNA


K
-xp
xn
x
Kmax


φ
Vbi
-xp
xn
x

- **Vrednost ugrađenog napona** kod skokovitog p-n spoja (pod pretpostavkom postojanja totalnog osiromašenja) je istovremeno proporcionalna i razlici sopstvenih energetskih nivoa (E_{ip} i E_{in}) u p i n tipu poluprovodnika. Pošto je E_{Fp}=E_{Fn} ugrađeni napon je:

$$qV_{bi} = E_{ip} - E_{in} = E_{ip} - E_{Fp} + E_{Fn} - E_{in} .$$

- Koncentracija šupljina u p-tipu poluprovodnika je p=N_A i može se izraziti preko sopstvene koncentracije nosilaca:

$$N_A = p = N_V e^{\frac{-(E_{Fp}-E_{Vp})}{kT}} = N_V e^{\frac{-(E_{Fp}+E_{ip}-E_{ip}-E_{Vp})}{kT}} = n_i e^{\frac{E_{ip}-E_{Fp}}{kT}},$$

  odakle je:

$$E_{ip} - E_{Fp} = kT \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right).$$

- Koncentracija elektrona u n-tipu poluprovodnika je n=N_D i može se izraziti preko sopstvene koncentracije nosilaca:

$$N_D = n = N_C e^{\frac{-(E_{Cn}-E_{Fn})}{kT}} = N_C e^{\frac{-(E_{Cn}+E_{in}-E_{in}-E_{Fn})}{kT}} = n_i e^{\frac{E_{Fn}-E_{in}}{kT}},$$

  odakle je:

$$E_{Fn} - E_{in} = kT \ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right).$$

- **Vrednost ugrađenog napona**, odnosno potencijalna razlika između neutralnih oblasti p i n tipa poluprovodnika je:

$$\boldsymbol{V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}}.$$

- Raspodele električnog polja $K(x)$ i potencijala $\varphi(x)$ u prelaznoj oblasti se određuju na osnovu **Poasonove jednačine**, odnosno raspodele **zapreminske gustine vezanog naelektrisanja $\boldsymbol{\rho(x)}$** koje u njoj postoji i dielektrične konstante materijala $\varepsilon_s = \varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}$:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} = -\frac{dK(x)}{dx}.$$

- Gustine naelektrisanja su: $\rho(x) = -qN_A$ za $-x_p \le x \le 0$ i $\rho(x) = qN_D$ za $0 \le x \le x_n$.

- Električno polje u p- oblasti je:

$$K = \int \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} dx = -\int \frac{qN_A}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} dx = -\frac{qN_A}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} x + C_1 .$$

  Konstanta integraljenja C_1 se određuje iz uslova da električno polje postoji samo u prelaznoj oblasti, odnosno da je K=0 pri x=-x_p. Električno polje u p oblasti je:

$$K = -\frac{qN_A}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}}(x + x_p) \qquad -x_p \le x \le 0 ,$$

  i predstavlja linearnu funkciju rastojanja.

- Električno polje u n-oblasti je:

$$K = \int \frac{qN_D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} dx = \frac{qN_D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}} x + C_2$$

Konstanta integraljenja C_2 se određuje iz uslova da električno polje postoji samo u prelaznoj oblasti, odnosno da je K=0 pri x=x_n. Električno polje u n oblasti je:

$$K = \frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}(x - x_n) = -\frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}(x_n - x) \quad 0 \le x \le x_n \, .$$

- Maksimalna vrednost električnog polja je na metalurškom spoju, odnosno za $x = 0$:

$$K_{max} = -\frac{qN_A}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}x_p = -\frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}x_n \, .$$

- Važi relacija:

$$\boldsymbol{x_p N_A = x_n N_D}$$

Prelazna oblast se širi podjednako sa obe strane metalurškog spoja ukoliko su koncentracije primesa u p i n oblastima jednake. Kada se koncentracije razlikuju, nastaje nesimetrično širenje prelazne oblasti i to je ona veća na strani sa manjom koncentracijom primesa.

- Raspodela potencijala na spoju se određuje integraljenjem funkcije zavisnosti električnog polja. U p- oblasti je:

$$\varphi(x) = -\int K(x)dx = \int \frac{qN_A}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}(x + x_p)dx = \frac{qN_A}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(\frac{x^2}{2} + xx_p\right) + C_3 \, .$$

Iz uslova da je potencijal jednak 0 na x=-x_p, izračunava se konstanta integraljenja C_3:

$$\varphi(-x_p) = \frac{qN_A}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(\frac{x_p^2}{2} - \frac{2x_p^2}{2}\right) + C_3 = 0 \, ,$$

$$C_3 = \frac{qN_A}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\frac{x_p^2}{2} \, ,$$

pa se može pisati:

$$\varphi(x) = \frac{qN_A}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(x^2 + 2xx_p + x_p^2\right) = \frac{qN_A}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(x + x_p\right)^2 .$$

Potencijal u n- oblasti je:

$$\varphi(x) = -\int K(x)dx = \int \frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}(x_n - x)dx = \frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(xx_n - \frac{x^2}{2}\right) + C_4 \, .$$

Konstanta integraljenja C_4 određuje se iz uslova kontinuiteta funkcije $\varphi(x)$ na metalurškom spoju (x=0):

$$\frac{qN_A}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}x_p^2 = \frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}} \cdot 0 + C_4 \Rightarrow \; C_4 = \frac{qN_A}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}x_p^2 \, ,$$

tako da se za potencijal u n- oblasti može pisati:

$$\varphi(x) = \frac{qN_D}{\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(xx_n - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{qN_A}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}x_p^2 \, .$$

- Ugrađeni napon p-n spoja je u stvari potencijal za x=x_n:

$$V_{bi} = \varphi(x_n) = \frac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon_{rSi}}\left(N_D x_n^2 + N_A x_p^2\right) \, .$$

- **Širina prelazne oblasti** sa obe strane metalurškog spoja zavisi od koncentracije primesa u p i n oblastima i vrednosti ugrađenog napona. Na osnovu x_pN_A=x_nN_D širina prelazne oblasti sa n strane je:

$$x_n = \left[\frac{2\varepsilon_s V_{bi}}{q}\frac{N_A}{N_D(N_A+N_D)}\right]^{1/2},$$

a sa p strane ova širina je:

$$x_p = \left[\frac{2\varepsilon_s V_{bi}}{q}\frac{N_D}{N_A(N_A+N_D)}\right]^{1/2}.$$

Ukupna širina prelazne oblasti je:

$$w = x_n + x_p\ ,$$

$$w = \left[\frac{2\varepsilon_s V_{bi}}{q}\frac{N_A+N_D}{N_A N_D}\right]^{1/2}.$$

- Primenom polarizacije na p-n spoj dolazi do preraspodele potencijala unutar njega, a time i do promene širine prelazne oblasti. Ukoliko je pozitivan kraj polarizacije vezan za p oblast, a negativan kraj za n oblast kaže se da je spoj **direktno polarisan** i širina prelazne oblasti se smanjuje. Analogno, kada se pozitivan kraj polarizacije veže za n oblast, a negativan kraj za p oblast kaže se da je spoj **inverzno polarisan** i širina prelazne oblasti se povećava. Vrednost širine prelazne oblasti zavisi od primenjenog napona *V* na osnovu relacije:

$$w = \left[\frac{2\varepsilon_s(V_{bi}\pm V)}{q}\frac{N_A+N_D}{N_A N_D}\right]^{1/2}.$$

Znak - važi za direktnu, a znak + za inverznu polarizaciju spoja, dok se *V* uzima po apsolutnoj vrednosti.

- Kapacitivnost p-n spoja predstavlja kapacitivnost prelazne oblasti i zavisi od njene širine, kao i od površine p-n spoja S:

$$C = \varepsilon_s\frac{S}{w} = S\left[\frac{q\varepsilon_s}{2(V_{bi}\pm V)}\frac{N_A N_D}{N_A+N_D}\right]^{1/2}.$$

- Promena širine prelazne oblasti sa primenjenom polarizacijom izaziva promenu kapacitivnosti p-n spoja i koristi se u takozvanim **varikap diodama** čija kapacitivnost se menja u zavisnosti od napona na koji su priključene. Ovakav promenljivi kondenzator se koristi za filterska podešavanja u mikrotalasnim kolima. Kapacitivnost pri određenoj polarizaciji se često daje u obliku zavisnom od kapacitivnosti kada nema polarizacije:

$$C = \frac{C(0)}{\left(1+\frac{V}{V_{bi}}\right)^{1/2}}.$$

- Ukoliko je jedna strana p-n spoja mnogo više dopirana od druge (izrazito strm spoj) prelazna oblast se širi na stranu sa nižom koncentracijom primesa i izraz za kapacitivnost se može napisati u obliku:

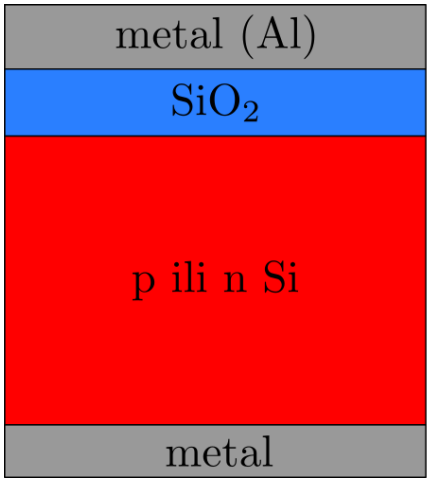
$$C \approx \varepsilon_s\frac{S}{x_p} = S\left[\frac{q\varepsilon_s N_A}{2(V_{bi}\pm V)}\right]^{1/2} \text{ za } N_D \text{»} N_A\,,$$

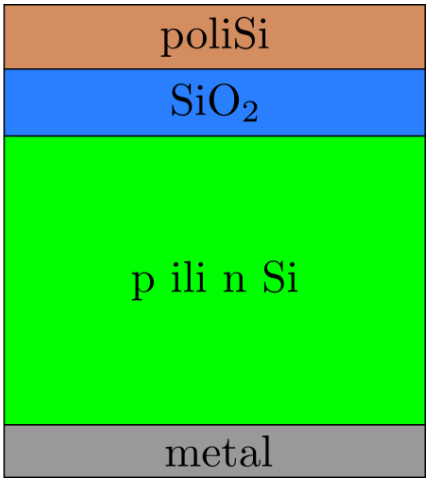
ili

$$C \approx \varepsilon_s\frac{S}{x_n} = S\left[\frac{q\varepsilon_s N_D}{2(V_{bi}\pm V)}\right]^{1/2} \text{ za } N_A \text{»} N_D.$$

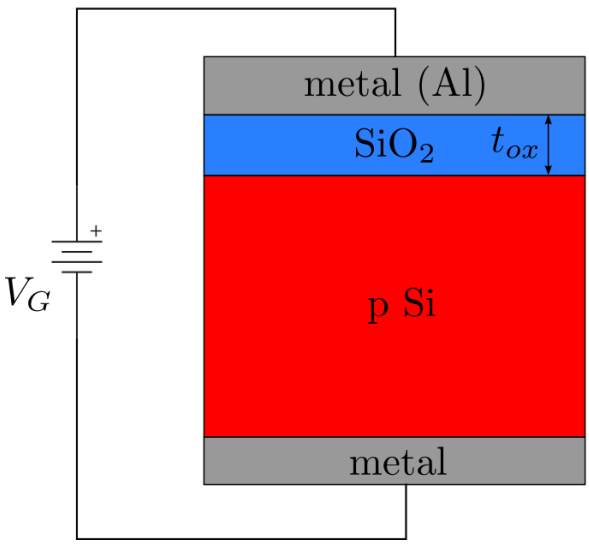
MOS KONDENZATOR – MOS STRUKTURA

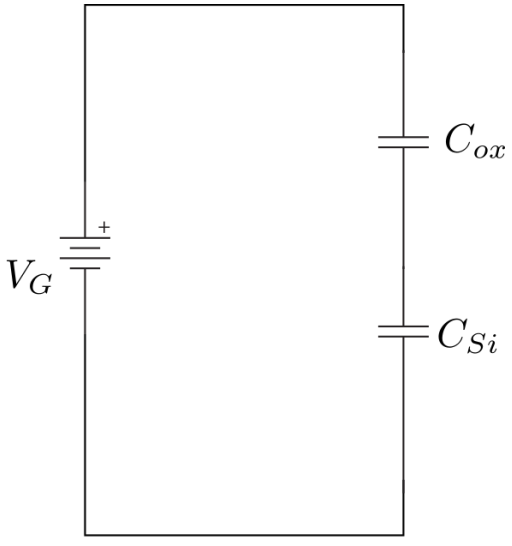
- **Metal-oxide-semiconductor** (MOS) struktura predstavlja MOS kondenzator





- **Metal** (obično Al) ili **polySi** (polikristalni silicijum dopiran visokom koncentracijom primesa n ili p tipa) imaju ulogu **jedne elektrode** MOS kondenzatora.
- SiO_2 – **silicijum dioksid** (izolacioni sloj) debljine t_{ox} ima ulogu dielektrika
- **Supstrat** (Si bulk) – p ili n tip poluprovodnika sa metalnim kontaktom čine **deo dielektrika i drugu elektrodu** MOS kondenzatora u zavisnosti od stanja MOS strukture.
- MOS kondenzator na supstratu p-tipa sa polarizacijom - V_G:





- Kapacitivnost MOS strukture se sastoji od **redne veze kapacitivnosti oksida C_{ox} i kapacitivnosti oblasti osiromašenja C_{Si}** debljine w_D (sve kapacitivnosti su po jedinici površine):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{ox}} + \frac{1}{C_{Si}}$$

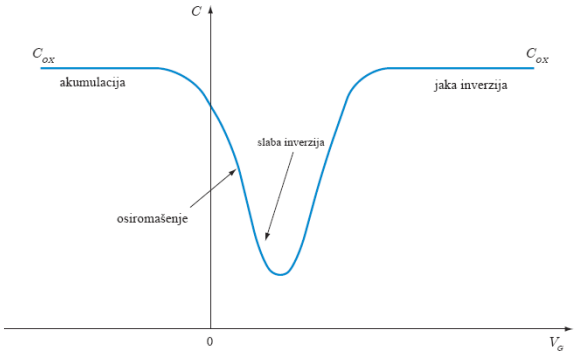
$$C_{ox} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

$$C_{Si} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{Si}}{w_D}$$

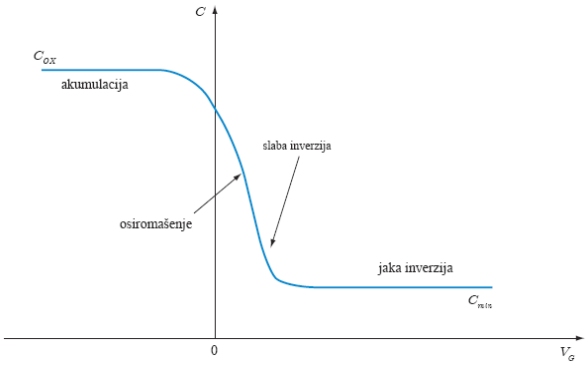
- Zavisnost kapacitivnosti MOS strukture od primenjenog napona polarizacije se prikazuje tzv. **C-V krivama**

- Naponu V_G superponira se naizmenični napon v_g niske ili visoke frekvencije.

- Zavisno od vrednosti napona V_G struktura se nalazi u stanju akumulacije, osiromašenja, slabe ili jake inverzije.



v_g niske frekvencije (LF)



v_g visoke frekvencije (HF)

- U režimu **akumulacije** nema oblasti osiromašenja i ukupna kapacitivnost je jednaka kapacitivnosti oksida.

- U režimu **osiromašenja** ukupna kapacitivnost zavisi od obe komponente kapacitivnosti. Kako se povećava širina osiromašene oblasti - w_D, tako se ukupna kapacitivnost smanjuje usled smanjenja C_D.

- U režimu **slabe inverzije pri niskim frekvencijama** primenjenog napona (LF), obe komponente kapacitivnosti imaju udela sve dok invertovani sloj nosilaca dozvoljava da se promene napona odražavaju na širinu osiromašene oblasti.

- U režimu **jake inverzije pri niskim frekvencijama** primenjenog napona (LF), visoka koncentracija nosilaca u invertovanom sloju sprečava da se primenjeni napon odražava na širinu osiromašene oblasti, tako da je ukupna kapacitivnost jednaka kapacitivnosti oksida.

- U režimu **inverzije pri visokim frekvencijama** primenjenog napona (HF – iznad 100Hz) nosioci u invertovanom sloju ne uspevaju da prate brze promene primenjenog napona. Ukupna kapacitivnost ima vrednost redne veze kapacitivnosti oksida i kapacitivnosti osiromašene oblasti pri njenoj najvećoj širini (kapacitivnost osiromašenja ima minimalnu vrednost).

- Napon na gejtu - V_G neophodan da dođe do stanja jake inverzije, odnosno da koncentracija manjinskih nosilaca uz međupovršinu Si-SiO_2 postane jednaka koncentraciji većinskih nosilaca u unutrašnjosti supstrata predstavlja **napon praga.**

- Zavisi od:
  - Koncentracije primesa u supstratu
  - Debljine oksida
  - Naelektrisanja u oksidu i na međupovršini Si-SiO_2
  - Kontaktne razlike potencijala između metala i poluprovodnika

- **Napon praga** MOS strukture na P tipu supstrata je određen izrazom:

$$V_T = V_{FB} + 2\psi_B + \frac{Q_D}{C_{ox}}.$$

- **Napon ravnih zona** V_{FB} je funkcija razlike izlaznih radova metala i poluprovodnika- ϕ_{ms} i napona u oksidu V_{ox}. Ovaj napon se izračunava na osnovu izlaznog rada metala - ϕ_m, afiniteta elektrona u poluprovodniku - χ, energetskog procepa poluprovodnika E_G, razlike između stvarnog Fermijevog nivoa i Fermijevog nivoa u sopstvenom poluprovodniku - $q\psi_B$, površinske gustine naelektrisanja u oksidu - qN_{ox} i kapacitivnosti oksida po jedinici površine - C_{ox}:

$$V_{FB} = \phi_{ms} + V_{ox} = \phi_m - \underbrace{\left(\chi + \frac{E_G}{2q} + \psi_B\right)}_{\phi_s} - \frac{qN_{ox}}{C_{ox}}.$$

- Razlika između stvarnog Fermijevog nivoa i Fermijevog nivoa u sopstvenom poluprovodniku - $q\psi_B$ određuje takozvani **Fermijev potencijal** ψ_B i zavisi od koncentracije primesa u poluprovodniku:

$$\psi_B = \frac{E_{Fi} - E_F}{q} = \frac{kT}{q}\ln\frac{N_A}{n_i},$$

  dok kapacitivnost oksida (po jedinici površine) zavisi od njegove debljine:

$$C_{ox} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ox}}{t_{ox}}.$$

- Naelektrisanje u osiromašenoj oblasti zavisi od njene širine $Q_D = qN_A w_D$ tako da se napon praga svodi na izraz:

$$V_T = V_{FB} + 2\psi_B + \frac{\sqrt{2\varepsilon_o \varepsilon_{Si} q N_A}}{C_{ox}}\sqrt{2\psi_B}$$

- Kod MOS strukture na N tipu supstrata napon praga je predstavljen izrazom:

$$V_T = V_{FB} - 2|\psi_B| - \frac{\sqrt{2\varepsilon_o \varepsilon_{Si} q N_D}}{C_{ox}}\sqrt{2|\psi_B|}$$

  pri čemu je Fermijev potencijal:

$$\psi_B = \frac{E_{Fi} - E_F}{q} = -\frac{kT}{q}\ln\frac{N_D}{n_i}$$