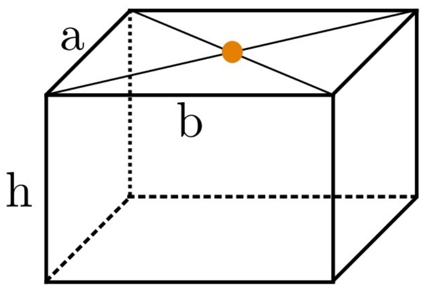
U geometrijskom centru plafona, dimenzija $a = 3\,\mathrm{m}$ i $b = 4\,\mathrm{m}$, prostorije oblika kvadra, visine $h = 2.6\,\mathrm{m}$, nalazi se električna sijalica jačine $I = 100\,\mathrm{cd}$. Smatrajući sijalicu izotropnim svetlosnim izvorom izračunati najveću i najmanju osvetljenost prostorije.

Rešenje:
Data je ilustracija kao na slici 1.



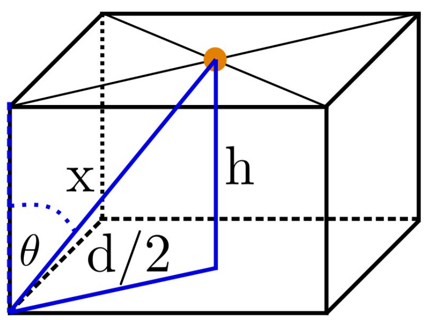
Slika 1: Ilustracija zadatka.

Geometrijski centar plafona predstavlja tačku u kojoj se seku dijagonale plafona, i ta tačka je predstavljena narandžastim kružićem. Prvo će biti prikazan postupak određivanja osvetljenosti tačke u prostoriji koja je najmanje osvetljena. Za određivanje osvetljenosti tačke, potrebno je primeniti Lamberov zakon čija matematička formulacija glasi:

$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta \tag{1}$$

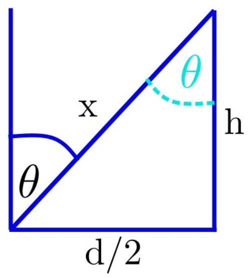
U jednačini 1, E je osvetljenost tačke (jedinica je lx), veličina I je jačina svetlosti (jedinica je cd), a r je udaljenost između izvora svetlosti i tačke u kojoj računamo osvetljenost. Ugao θ predstavlja ugao između normale na površinu na kojoj se nalazi tačka čiju osvetljenost je potrebno računati i prave koja spaja izvor svetlosti i tačku čiju osvetljenost je potrebno računati.
Tačka koja je najmanje osvetljena je tačka koja se nalazi u uglu prostorije. Međutim, kako formula Lamberovog zakona uključuje element koji zavisi od ugla, potrebno je tačku u uglu prostorije analizirati na tri načina. Kao da je ta tačka deo poda, kao da je da ta tačka deo bočnog zida i kao da je ta tačka deo frontalnog zida. Potrebno je izračunati osvetljenost za sva tri slučaja, a zatim odrediti gde je zapravo najmanja osvetljenost.

Ukoliko je tačka deo poda, karakterističan trougao je ilustrovan na slici 2.



Slika 2: Ilustracija karakterističnog trougla kada je tačka na podu.

Karakterističan trougao prikazan je plavom bojom, gde je x hipotenuza pravouglog trougla čije su katete h i $d/2$. Ugao θ je van karakterističnog trougla, međutim, kao ugao sa paralelnim kracima, ugao θ je jednak uglu između katete h (visine sobe) i hipotenuze x, kao što je prikazano svetlo plavom bojom na slici 3.



Slika 3: Stranice i uglovi karakterističnog trougla kada je tačka na podu.

Samim tim, kosinus ugla θ moguće je pronaći iz karakterističnog pravouglog trougla. Primena Lamberovog zakona na ilustraciju sa slike 2 glasi:

$$E_{pod} = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{x^2} \cdot \frac{h}{x}, \tag{2}$$

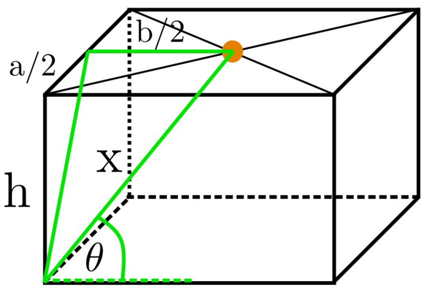
Stranica x je hipotenuza pravouglog trougla čije su katete h i $d/2$. Samim tim, x se može izračunati kao:

$$x = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}} = 3.6\,\mathrm{m} \tag{3}$$

Kada se ta vrednost vrati u jednačinu 2, za osvetljenost tačke na podu dobija se:

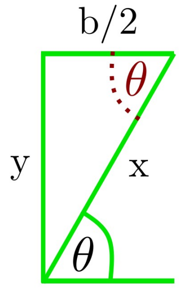
$$E_{pod} = 5.57\,\mathrm{lux} \tag{4}$$

Ukoliko je tačka deo bočnog zida, karakteristični uglovi i trouglovi su ilustrovani na slici 4.



Slika 4: Ilustracija karakterističnog trougla kada je tačka na bočnom zidu.

Karakterističan trougao je označen zelenom bojom. Za ovaj slučaj potrebno je razumeti da su i karakterističan trougao i ugao θ nagnuti prema sredini sobe. U ovom slučaju, x je ponovo hipotenuza pravouglog trougla $b/2$ je jedna kateta, a druga kateta označena je sa y. Ugao θ ponovo nije deo karakterističnog trougla, ali je kao ugao sa paralelnim zracima jednak uglu između hipotenuze x i katete $b/2$, kao što je tamno crvenom bojom prikazano na slici 5.



Slika 5: Stranice i uglovi karakterističnog trougla kada je tačka na bočnom zidu.

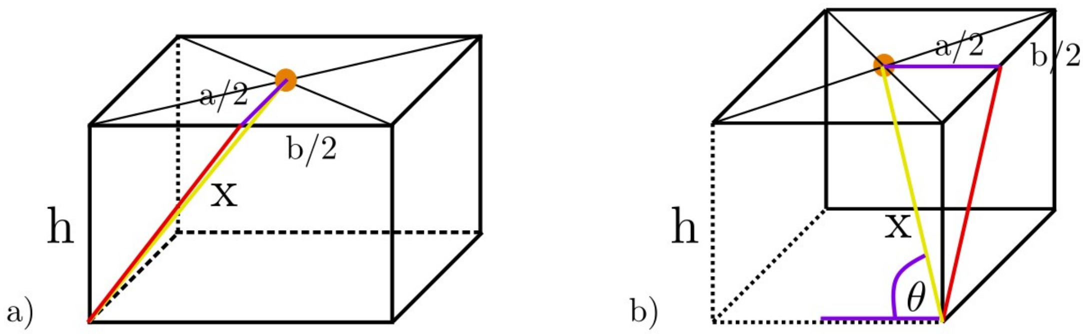
Samim tim, kosinus ugla θ moguće je pronaći iz karakterističnog pravouglog trougla, bez potrebe da se računa vrednost druge katete (y). Primena Lamberovog zakona na ilustraciju sa slike 4 glasi:

$$E_{bz} = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{x^2} \cdot \frac{\frac{b}{2}}{x}, \tag{5}$$

pa je odatle:

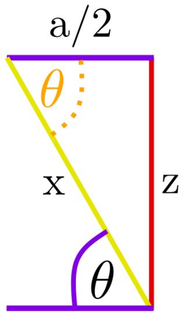
$$E_{bz} = 4.29\,\mathrm{lux} \tag{6}$$

Ukoliko je tačka deo frontalnog zida, karakteristični uglovi i trouglovi su ilustrovani na slici 6.



Slika 6: Ilustracija karakterističnog trougla kada je tačka na frontalnom zidu: a) pogled sa frontalne strane; b) pogled sa bočne strane.

Karakteristični trougao sastoji se od hipotenuze x označene žutom bojom, kraće katete $a/2$, označene ljubičastom bojom i duže katete označene crvenom bojom i slovom z, kao što je prikazano na slici 7. Kao i u prethodnom slučaju, ugao θ je van ovog trougla, ali ugao između hipotenuze i kraće katete jednak uglu θ kao ugao sa paralelnim kracima.



Slika 7: Stranice i uglovi karakterističnog trougla kada je tačka na frontalnom zidu.

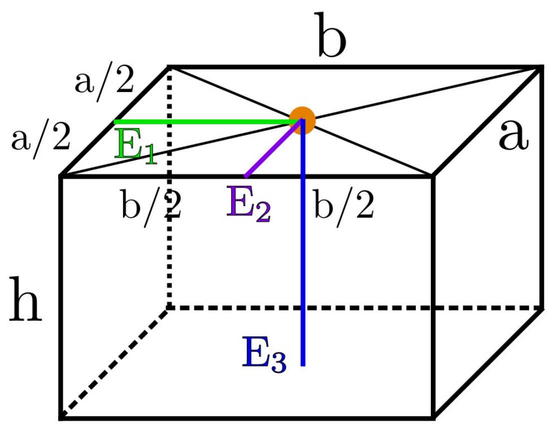
Samim tim, kosinus ugla θ moguće je pronaći iz karakterističnog pravouglog trougla, bez potrebe da se računa vrednost druge katete (z). Primena Lamberovog zakona na ilustraciju sa slike 4 glasi:

$$E_{fz} = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{x^2} \cdot \frac{\frac{a}{2}}{x}, \tag{7}$$

$$E_{fz} = 3.22\,\text{lux} \tag{8}$$

Proračunom se zaključuje da je tačka koja je najmanje osvetljena tačka koja je na frontalnom zidu.

Za tačku koja je najviše osvetljena, potrebno je analizirati slučajeve gde će važiti da je $\cos\theta = 1$, pošto se za takve slučajeve dobija maksimalna vrednost osvetljenosti. Postoje tri takve tačke, jedna na bočnom zidu, jedna na frontalnom zidu i jedna na podu, kao što je prikazano na slici 8, pa je ponovo potrebno analizirati tri slučaja.



Slika 8: Tačke u sobi za koje važi da je $\cos\theta = 1$.

Tačka koja je najviše osvetljena je tačka od ove tri koja je najmanje udaljena od izvora svetlosti. Za tačku na bočnom zidu, prema Lamberovom zakonu važiće:

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{(\frac{b}{2})^2} \cdot 1 = 25\,\text{lux}. \tag{9}$$

Za tačku na frontalnom zidu, prema Lamberovom zakonu važiće:

$$E_2 = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{(\frac{a}{2})^2} \cdot 1 = 44.44\,\text{lux}. \tag{10}$$

Za tačku na podu, prema Lamberovom zakonu važiće:

$$E_2 = \frac{I}{r^2} \cdot \cos\theta = \frac{I}{h^2} \cdot 1 = 14.79\,\text{lux}. \tag{11}$$

Proračunom se zaključuje da je tačka koja je najmanje osvetljena tačka koja je na sredini vrha frontalnog zida. Time je zadatak završen.