Sadržaj

1 Fizičke veličine i merne jedinice **1**
1.1 Fizičke veličine . . . 1
1.2 Medjunarodni sistem mernih jedinica . . . 1
1.3 Definicija osnovnih mernih jedinica . . . 1
1.4 Decimalne merne jedinice SI . . . 2
1.5 Dimenzije fizičkih veličina . . . 2

2 Elementi vektorskog računa **5**
2.1 Skalarne i vektorske veličine . . . 5
2.2 Sabiranje i oduzimanje vektora . . . 6
2.3 Množenje vektora . . . 7
2.3.1 Skalarni proizvod . . . 7
2.3.2 Vektorski proizvod . . . 9

3 Kinematika materijalne tačke **11**
3.1 Predmet proučavanja klasične mehanike . . . 11
3.2 Mirovanje i kretanje . . . 11
3.3 Pravolinijsko kretanje . . . 12
3.3.1 Srednja i trenutna brzina . . . 12
3.3.2 Srednje i trenutno ubrzanje . . . 14
3.3.3 Izražavanje puta i brzine u integralnom obliku . . . 15
3.3.4 Pravolinijsko kretanje sa konstantnim ubrzanjem . . . 16
3.3.5 Slobodno padanje . . . 18
3.4 Krivolinijsko kretanje . . . 19
3.4.1 Kružno kretanje . . . 22
3.4.2 Hitac . . . 23

4 Dinamika materijalne tačke **25**
4.1 Predmet dinamike . . . 25
4.2 Sila i masa. Impuls . . . 25
4.3 Prvi Njutnov zakon . . . 26
4.4 Drugi Njutnov zakon . . . 27
4.5 Treći Njutnov zakon . . . 28
4.6 Gravitacija . . . 30
4.6.1 Njutnov zakon gravitacije . . . 30
4.6.2 Gravitaciono polje . . . 30
4.7 Težina tela . . . 31
4.8 Sila trenja . . . 32
4.9 Impuls sile . . . 33
4.10 Zakon održanja impulsa sistema tela . . . 34
4.11 Centar mase . . . 35
4.12 Centripetalna sila . . . 37

5 Rad i energija **39**
5.1 Rad . . . 39
5.2 Snaga . . . 40
5.3 Energija . . . 41
5.3.1 Kinetička energija . . . 41
5.3.2 Potencijalna energija . . . 42
5.3.3 Zakon održanja energije . . . 44
5.4 Sudari . . . 45
5.4.1 Opšte karakteristike sudara . . . 45
5.4.2 Savršeno elastičan sudar . . . 46
5.4.3 Savršeno neelastičan sudar . . . 48

6 Statika čvrstog tela **50**
6.1 Predmet statike . . . 50
6.2 Uslov ravnoteže materijalne tačke . . . 50
6.3 Delovanje sila na kruto telo . . . 51
6.4 Statički moment sile . . . 51

7 Dinamika rotacionog kretanja **53**
7.1 Moment inercije . . . 53
7.2 Kinetička energija, rad i snaga . . . 54
7.3 Moment impulsa i zakon održanja momenta impulsa . . . 56
7.4 Analogija izmedju veličina translatornog i rotacionog kretanja . . . 58

8 Elastičnost **60**
8.1 Vrste deformacija . . . 60
8.2 Napon i relativna deformacija . . . 60
8.3 Vrste elastičnih deformacija . . . 61
8.3.1 Istezanje . . . 61
8.3.2 Smicanje . . . 63
8.3.3 Torzija . . . 64
8.3.4 Savijanje . . . 65
8.4 Unutrašnja elastična potencijalna energija tela . . . 65

9 Mehanika fluida **67**
9.1 Pritisak u fluidu . . . 67
9.2 Paskalov zakon . . . 67
9.3 Hidrostatički pritisak . . . 69
9.4 Sila potiska i Arhimedov zakon . . . 70
9.5 Karakteristike strujanja . . . 71
9.6 Stacionarno strujanje. Teorema kontinuiteta strujanja . . . 72
9.7 Bernulijeva jednačina . . . 73
9.8 Primena Bernulijeve jednačine . . . 74
9.8.1 Toričelijeva teorema . . . 74
9.9 Viskoznost . . . 74

10 Toplota i temperatura **77**
10.1 Temperatura i termička ravnoteža . . . 77
10.2 Termometri . . . 77
10.3 Temperaturske skale . . . 80
10.4 Širenje čvrstih i tečnih tela pri zagrevanju . . . 80
10.5 Termičko naprezanje materijala . . . 82

10.6 Zakoni idealnih gasova . . . 82
10.6.1 Bojl-Mariotov zakon . . . 82
10.6.2 Gej-Lisakov zakon . . . 83
10.6.3 Šarlov zakon . . . 84
10.6.4 Avogadrov zakon . . . 85
10.6.5 Daltonov zakon . . . 85
10.7 Jednačina stanja idealnog gasa . . . 85
10.8 Količina toplote. Specifični toplotni kapacitet . . . 87
10.8.1 Toplota kao oblik energije . . . 87
10.8.2 Specifični toplotni kapacitet. Kalorimetrija . . . 87
10.9 Prenošenje toplote . . . 89
10.9.1 Provodjenje . . . 89
10.9.2 Strujanje . . . 90
10.9.3 Zračenje . . . 90

11 Osnovi termodinamike 92
11.1 Osnovne karakteristike . . . 92
11.2 Unutrašnja energija. Stepen slobode . . . 92
11.3 Rad gasa pri promeni njegove zapremine . . . 93
11.4 Prvi princip termodinamike . . . 94
11.5 Specifični toplotni kapaciteti . . . 95
11.6 Rad pri promeni stanja gasa . . . 97
11.7 Adijabatski proces . . . 99
11.8 Kružni procesi . . . 100
11.8.1 Reverzibilni i ireverzibilni procesi . . . 100
11.8.2 Karnov kružni proces . . . 101
11.9 Drugi princip termodinamike . . . 102

12 Oscilacije 104
12.1 Mehaničke oscilacije . . . 104
12.1.1 Periodično kretanje. Harmonijsko oscilovanje . . . 104
12.1.2 Brzina i ubrzanje kod harmonijskog oscilovanja. Jednačina harmonijskog oscilovanja 104
12.1.3 Grafički prikaz harmonijskog oscilovanja . . . 106
12.1.4 Sila kod harmonijskog oscilatornog kretanja. Jednostavniji harmonijski oscilatori . 106
12.1.5 Energija kod harmonijskog oscilatornog kretanja . . . 110
12.1.6 Prigušene oscilacije . . . 110
12.1.7 Prinudne oscilacije. Rezonancija. . . . 113

13 Talasno kretanje 116
13.1 Nastanak mehaničkih talasa . . . 116
13.2 Brzina prostiranja impulsa . . . 117
13.2.1 Brzina prostiranja transverzalnih impulsa . . . 117
13.2.2 Brzina prostiranja longitudinalnih impulsa . . . 118
13.2.3 Sinusno talasno kretanje . . . 119
13.3 Hajgensov princip . . . 120
13.4 Jednačina progresivnog talasa . . . 120
13.5 Prenošenje energije talasima . . . 123
13.6 Interferencija talasa . . . 124
13.7 Stojeći talasi . . . 126
13.8 Odbijanje (refleksija) talasa . . . 127
13.9 Prelamanje (refrakcija) talasa . . . 128

14 Akustika **130**
14.1 Osnovne karakteristike zvuka . . . 130
14.2 Zvučni izvori . . . 131
14.2.1 Zategnute žice . . . 131
14.2.2 Štapovi . . . 131
14.2.3 Vazdušni stubovi . . . 133
14.3 Intenzitet zvuka . . . 134
14.4 Rezonancija kod zvuka. Rezonatori . . . 135
14.5 Akustičnost prostorija . . . 138
14.6 Doplerov efekat . . . 139

15 Fotometrija **142**
15.1 Spektralna osetljivost oka . . . 142
15.2 Fotometrijske veličine i jedinice . . . 142

16 Geometrijska optika **148**
16.1 Zakoni geometrijske optike . . . 148
16.2 Prelamanje svetlosti kroz prizmu . . . 148
16.3 Disperzija svetlosti. Spektri . . . 149
16.4 Totalna refleksija. Optička vlakna . . . 151
16.5 Sferna sočiva i njihova podela . . . 153
16.6 Jednačina tankog sočiva . . . 153
16.7 Dobijanje lika pomoću tankog sočiva . . . 156
16.8 Optički instrumenti . . . 157
16.8.1 Lupa . . . 157
16.8.2 Optički mikroskop . . . 158
16.8.3 Projekcioni aparati . . . 160
16.8.4 Spektralni aparati . . . 160

17 Talasna (fizička) optika **162**
17.1 Interferencija svetlosti . . . 162
17.1.1 Mogućnost dobijanja koherentne svetlosti. Interferenciona slika . . . 162
17.2 Difrakcija svetlosti . . . 164
17.2.1 Difrakcija svetlosti na jednom prorezu . . . 164
17.2.2 Difrakcija svetlosti na više proreza . . . 166
17.3 Polarizacija svetlosti . . . 168
17.3.1 Nepolarizovana (prirodna) i polarizovana svetlost . . . 168
17.3.2 Dobijanje polarizovane svetlosti . . . 169

18 Ranije predstave o atomu **171**
18.1 Tomsonov i Raderfordov model atoma . . . 171
18.2 Spektar atoma vodonika . . . 173
18.3 Borovi postulati . . . 175
18.4 Frank - Hercov ogled . . . 175

19 Osnovi fizike atoma i molekula **177**
19.1 Kvantovanje momenta impulsa . . . 177
19.2 Prostorno kvantovanje . . . 177
19.3 Štern-Gerlahov eksperiment . . . 178
19.4 Spin elektrona . . . 179
19.5 Paulijev princip . . . 181

20 Osnovi nuklearne fizike **183**
20.1 Osnovne karakteristike jezgra . . . 183
20.2 Energija veze i defekt mase atomskog jezgra . . . 184
20.3 Nuklearne sile. Modeli jezgra . . . 186
20.4 Prirodna radioaktivnost . . . 189
20.5 Zakon radioaktivnog raspada . . . 190
20.6 Aktivnost radioaktivnog izvora . . . 192
20.7 Radioaktivna ravnoteža . . . 192
20.8 Alfa-čestice . . . 193
20.9 Beta-čestice . . . 197
20.10 Gama-zračenje . . . 200
20.11 Elektronski zahvat . . . 202
20.12 Ubrzavanje naelektrisanih čestica . . . 202
20.12.1 Linearni akceleratori . . . 202
20.12.2 Ciklotron . . . 203
20.12.3 Sinhrociklotron, Sinhrotron i Sinhrofazotron . . . 205
20.13 Nuklearna fisija . . . 205
20.14 Lančana nuklearna reakcija . . . 207
20.15 Nuklearna fuzija . . . 209

1. Fizičke veličine i merne jedinice

1.1 Fizičke veličine

Osnovu svakog objektivnog saznanja prirode čini eksperimenat. Cilj eksperimenta je da se odrede parametri od kojih zavisi posmatrana pojava. Ti parametri se nazivaju fizičke veličine. Ovako uveden pojam fizičkih veličina pokazuje da one nisu fizički objekti, stanja ili procesi, već se mogu shvatiti kao apstrakcija koja služi za opisivanje pojava.

Sve fizičke veličine se dele na *osnovne* i *izvedene veličine*. Osnovne veličine se ne definišu izrazima (jednačinama), već opisom postupka njihovog merenja i dogovorno se biraju i proglašavaju na medjunarodnim konferencijama, nakon odredjenog iskustva i saznanja o njima. Naziv osnovne dolazi od toga što se iz njih izvode i definišu sve ostale fizičke veličine. Koje veličine i koliko njih će se smatrati osnovnim zavisi od područja fizike. Za područje mehanike dovoljne su, na primer, tri osnovne veličine: dužina, vreme i masa, za elektromagnetizam četiri: dužina, vreme, masa i jačina električne struje, itd. Osnovne veličine su medjusobno nezavisne, pa se zbog toga nazivaju i nezavisnim veličinama.

Broj osnovnih veličina se tokom vremena menjao. Prema dosadašnjim odlukama Generalne konferencije za mere i težine (Conference Generale des Poids et Measures—CGPM), postoji sedam osnovnih i nezavisnih fizičkih veličina. To su: *dužina*, *masa*, *vreme*, *jačina električne struje*, *termodinamička temperatura*, *svetlosna jačina* i *količina materijala*. Smatra se da se pomoću ovih veličina može pokriti čitavo područje fizike i nauke uopšte.

Izvedene veličine se izvode i definišu iz već poznatih osnovnih veličina pomoću fizičkih zakona i izraza, ili iz već definisanih izvedenih veličina. One zavise od osnovnih veličina, a i medjusobno su zavisne, pa se nazivaju i zavisne veličine. Njihov broj nije ničim ograničen i stalno se menja sa razvojem fizike i nauke.

1.2 Medjunarodni sistem mernih jedinica

Izmeriti neku veličinu znači uporediti je sa unapred odabranom veličinom iste vrste koja je uzeta za jedinicu. Kao rezultat merenja dobija se broj koji pokazuje koliko se puta odabrana jedinica sadrži u merenoj veličini. Veličina koja se meri ne zavisi od merne jedinice. Medjutim, ako se ista veličina meri različitim mernim jedinicama, dobijaju se različiti merni brojevi. Ako je veća jedinica, dobija se manji broj, i obrnuto.

Da bi se izbegla proizvoljnost u izboru jedinica za merenje raznih fizičkih veličina, pristupilo se utvrdjivanju sistema jedinica. *Sistem jedinica je skup jedinica za merenje raznih fizičkih veličina, utvrdjen po odredjenom pravilu.*

Jedinice dogovorno usvojene za sedam osnovnih i nezavisnih fizičkih veličina nazivaju se osnovne merne jedinice. To su: za dužinu *metar*, za masu *kilogram*, za vreme *sekunda*, za jačinu električne struje *amper*, za termodinamičku temperaturu *kelvin*, za svetlosnu jačinu *kandela* i za količinu materijala *mol*. Jedinice za izvedene veličine izvode se iz osnovnih jedinica i nazivaju se izvedene merne jedinice.

Sistem jedinica sačinjen od sedam pomenutih osnovnih mernih jedinica i od njih izvedenih jedinica za izvedene fizičke veličine predstavlja *Medjunarodni sistem jedinica* (System International d' Unites), skraćeno SI. Pored osnovnih i izvedenih mernih jedinica, definisane su i jedinice za ugao u ravni (*radijan*) i prostorni ugao (*steradijan*) kao dopunske merne jedinice SI.

1.3 Definicija osnovnih mernih jedinica

U tabeli 1.1 date su osnovne veličine i osnovne merne jedinice SI.

Tabela 1.1: Osnovne veličine i osnovne merne jedinice SI

Osnovna veličina (naziv i oznaka)	Osnovna merna jedinica (naziv i oznaka)
dužina (l)	metar (m)
Masa (m)	kilogram (kg)
Vreme (t)	sekunda (s)
Jačina električne struje (I)	amper (A)
Termodinamička temperatura (T)	kelvin (K)
Svetlosna jačina (I_v)	kandela (cd)
Količina materijala (N)	mol (mol)

- *Metar je dužina putanje koju u vakuumu predje svetlost za vreme od* $1/299792458$ *sekunde.*
- *Kilogram je masa medjunarodnog etalona kilograma.* Medjunarodni etalon kilograma je potvrdila Prva generalna konferencija za mere i tegove 1889. godine, kada je proglašeno da se ovaj medjunarodni etalon ubuduće smatra jedinicom za masu. Medjunarodni etalon se čuva u Medjunarodnom birou za mere i tegove u Sevru kod Pariza.
- *Sekunda je trajanje* 9192631770 *perioda zračenja koje odgovara prelazu izmedju dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma* 133.
- *Amper je jačina stalne električne struje koja, kada se održava u dva prava paralelna provodnika, neograničene dužine i zanemarljivog kružnog poprečnog preseka, koji se nalaze u vakuumu na medjusobnom rastojanju od jednog metra, prouzrokuje medju tim provodnicima silu jednaku* $2 \cdot 10^{-7}$ *njutna po metru dužine.*
- *Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka* $1/273.16$ *termodinamičke temperature trojne tačke vode.*
- *Kandela je svetlosna jačina u odredjenom pravcu izvora koji emituje monohromatsko zračenje frekvencije* $5.4 \cdot 10^{14}\, Hz$ *i čija je energetska jačina u tom pravcu* $1/683$ *vata po steradijanu.*
- *Mol je količina materijala sistema koja sadrži toliko elementarnih jedinki koliko ima atoma u* 0.012 *kilograma ugljenika* 12 (elementarne jedinke mogu biti atomi, molekuli, joni i druge čestice ili odredjene skupine tih čestica).

1.4 Decimalne merne jedinice SI

Pored osnovnih, mogu se koristiti i decimalne merne jedinice. One su decimalni umnožioci ili decimalni delovi mernih jedinica Medjunarodnog sistema, a obrazuju se pomoću medjunarodno usvojenih prefiksa (tabela 1.2).

1.5 Dimenzije fizičkih veličina

Kada se govori o dimenzijama, imaju se u vidu osnovne veličine i jedinice pomoću kojih se može izraziti data veličina. Na primer, dimenzija površine uvek je jednaka kvadratu dužine i skraćeno se označava sa $[L^2]$, a može se izraziti u kvadratnim metrima, kvadratnim centimetrima itd. ; brzina se može izmeriti u jedinicama m/s, cm/s, itd., ali je njena dimenzija uvek jednaka količniku dimenzije dužine $[L]$ i dimenzije vremena $[T]$. Kao što se vidi, dimenzije fizičkih veličina se označavaju velikim slovima unutar uglastih zagrada, na primer dimenzija mase (m) sa $[M]$, dužine (l) sa $[L]$, vremena (t) sa $[T]$ itd.

Izrazi koji opisuju neku fizičku veličinu u različitim slučajevima mogu da budu različiti, ali dimenzije moraju ostati iste. Na primer, iako se formule za površinu trougla osnove a i visine h ($P{=}ah/2$) i kruga poluprečnika r ($P{=}r^2\pi$) razlikuju, dimenzija površine je u oba slučaja ista i jednaka $[L^2]$.

Tabela 1.2: Decimalne merne jedinice SI

Naziv prefiksa	Oznaka prefiksa	Činilac kojim se množi jedinica
ato	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
piko	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
mikro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deka	da	10^{1}
hekto	h	10^{2}
kilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
eksa	E	10^{18}

Prilikom odredjivanja dimenzija neke izvedene veličine, koriste se dimenzije osnovnih veličina. Na primer, dimenzija sile kao izvedene veličine jednaka je proizvodu dimenzije mase $[M]$ i dimenzije ubrzanja $[LT^{-2}]$, tj. $[MLT^{-2}]$.

Pravilno korišćene dimenzija može veoma efikasno da pomogne pri izvodjenju nekog izraza. Takva procedura je poznata pod nazivom *dimenziona analiza*. Njome se može proveriti ispravnost nekog izraza. U tom slučaju koriste se dva jednostavna pravila:

- *Sabrati se mogu samo veličine istih dimenzija* (ne mogu se sabrati, na primer, masa i dužina).
- *Veličine sa obe strane znaka jednakosti moraju imati iste dimenzije.*

Neka je, na primer, dobijen izraz za brzinu

$$v = v_o + \frac{1}{2}at^2,$$

gde je v brzina tela posle vremena t, v_o početna brzina i a ubrzanje. Dimenzije u gornjem izrazu su

$$\left[LT^{-1}\right] = \left[LT^{-1}\right] + \left[LT^{-2}\right]\left[T^2\right] = \left[LT^{-1}\right] + [L]\,.$$

Zapaža se da dimenzije na levoj i desnoj strani izraza nisu iste, što navodi na zaključak da je pri njegovom izvodjenju načinjena greška.

Poklapanje dimenzija sa jedne i druge strane znaka jednakosti ne znači da je dokazana ispravnost izraza u celini. Na primer, može da bude netačan bezdimenzioni množitelj koji ulazi u sastav izraza. Prema tome, provera dimenzija može da ukaže samo na netačnost izraza, ali ne i da posluži za dokazivanje njegove ispravnosti.

Dimenziona analiza, isto tako, može da posluži za brzu proveru ispravnosti izraza u koji se sumnja. Na primer, da li izraz za period oscilovanja matematičkog klatna glasi $T=2\pi\sqrt{l/g}$ ili $T=2\pi\sqrt{g/l}$, gde je l dužina klatna, a g ubrzanje Zemljine teže? Dimenziona analiza pokazuje da je prvi izraz,

$$[T] = \sqrt{[L]\,[L^{-1}T^2]} = \sqrt{[T^2]} = [T]\,,$$

ispravan, a drugi,

$$[T] \neq \sqrt{[LT^{-2}]\,[L^{-1}]} = \sqrt{[T^{-2}]} = \left[T^{-1}\right],$$

neispravan. Treba zapaziti da množilac 2π ne ulazi u konačan rezultat.

Dimenzije bilo koje fizičke veličine u mehanici mogu se izraziti pomoću formule

$$A = L^x M^y T^z,$$

gde eksponenti x, y i z mogu da budu celi brojevi ili razlomci, pozitivni ili negativni. Ako u izrazu nedostaje neka od dimenzija, kaže se da je njen eksponent jednak nuli.

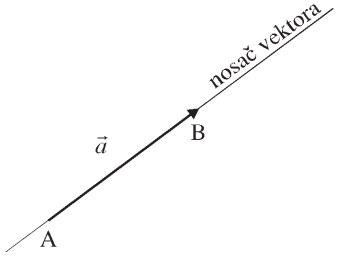
2. Elementi vektorskog računa

2.1 Skalarne i vektorske veličine

Većina fizičkih veličina su ili skalari ili vektori. Skalarne veličine su potpuno odredjene svojom brojnom vrednošću i odgovarajućom jedinicom. U skalarne veličine spadaju: temperatura, frekvencija, masa, gustina, rad, energija, itd. Na primer, kada se kaže da je trajanje nekog dogadjaja $30\,s$, vreme kao skalarna veličina je potpuno odredjeno. U vektorske veličine spadaju one veličine za čije je definisanje, pored brojne vrednosti i odredjene jedinice, potrebno poznavati još i pravac i smer. U vektorske veličine spadaju brzina, ubrzanje, impuls, moment impulsa, sila, moment sile, itd. Na primer, nije dovoljno da se kaže da na neko telo deluje sila od $10\,N$, već je potrebno da se poznaje pravac i smer njenog delovanja. Pored skalarnih i vektorskih, u fizici postoje i tenzorske veličine. Tenzor uključuje vektor kao poseban slučaj.

Upotreba vektora u fizici ima dve velike prednosti. Jedna je što se fizički zakoni mogu izraziti nezavisno od izbora koordinatnih osa. Dakle, vektorsko označavanje je "jezik" kojim može da se iskaže neki fizički sadržaj, a da se ne uvodi koordinatni sistem. Druga prednost je u tome što se korišćenjem vektorskog označavanja mnogi fizički zakoni mogu izraziti jednostavnijim i preglednijim oblicima u poredjenju sa izražavanjem u nekom odredjenom koordinatnom sistemu.

U fizici se vektori prikazuju kao orijentisane duži (sl. 2.1) i obeležavaju se malim slovima latinice sa strelicom iznad ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, itd.). Isto tako, obeležavanje vektora može se vršiti masnim slovima (**a**, **b**, **c**, itd.), ili sa dva velika slova koja predstavljaju početak i kraj vektora (na primer $\vec{AB}$ na sl. 2.1). Nosač vektora je prava na kojoj leži vektor i on odredjuje pravac vektora. Smer vektora je odredjen strelicom u tački B. Tačka A predstavlja početak, a tačka B kraj vektora.



Sl. 2.1: Označavanje vektora

Intenzitet vektora se označava malim slovima latinice bez strelice, na primer a, a često i $|\vec{a}|$ i predstavlja brojnu vrednost dužine AB (sl. 2.1.

Vektor čiji je intenzitet jednak jedinici naziva se jedinični vektor ili ort. Na primer, ort vektora $\vec{a}$ obeležava se kao $\hat{a}$, $ort\,\vec{a}$ ili $\vec{a}_o$. On se definiše kao odnos vektora $\vec{a}$ i njegovog intenziteta

$$\vec{a}_o = \frac{\vec{a}}{a}. \tag{2.1}$$

Ako $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ i $\vec{k}$ predstavljaju tri medjusobno upravna (ortogonalna) jedinična vektora koji definišu koordinatni sistem (sl. 2.2), onda se bilo koji vektor u takvom sistemu može izraziti na sledeći način:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \tag{2.2}$$

gde a_x, a_y, i a_z predstavljaju komponente vektora $\vec{a}$ duž osa koordinatnog sistema. Komponenta a_x može da se izrazi kao

$$a_x = \vec{a}\,\vec{\imath},$$

jer je

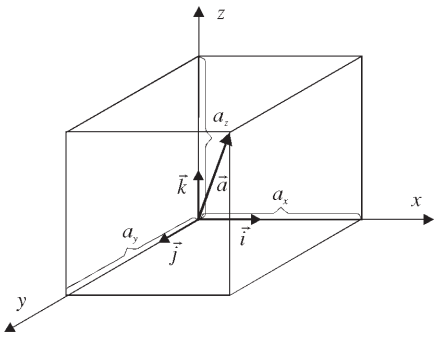
$$\vec{a}\,\vec{\imath} = a_x\vec{\imath}\,\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}\,\vec{\imath} + a_z\vec{k}\,\vec{\imath} = a_x, \tag{2.3}$$

gde je uzeto da je

$$\vec{\jmath}\,\vec{\imath} = \vec{k}\,\vec{\imath} = 0$$

i

$$\vec{\imath}\,\vec{\imath} = 1.$$



Sl. 2.2: Komponente vektora u pravcu koordinatnih osa

Intenzitet vektora $\vec{a}$ se može izraziti preko njegovih komponenata a_x, a_y i a_z na sledeći način:

$$a = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k})(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k})},$$

ili

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.4}$$

Vektori mogu biti slobodni i vezani. Slobodni vektori se mogu pomerati paralelno samima sebi u prostoru. Vezani vektori su fiksirani za odredjenu tačku. Ovakav slučaj je, na primer, vektor težine tela, koji je vezan za tačku koja se naziva težište.

Pošto su vektori i skalari različite veličine, oni se ne mogu medjusobno sabirati i oduzimati, ali se mogu množiti i deliti. Množenjem skalara m i vektora $\vec{a}$ dobija se vektor $\vec{b}$, čiji je intenzitet m puta veći od intenziteta vektora $\vec{a}$

$$\vec{b} = m\vec{a}. \tag{2.5}$$

Ako je $m<0$, menja se smer vektora $\vec{b}$. Ako je $m=0$, onda je proizvod ovakvog skalara i vektora $\vec{a}$ jednak nuli (nula vektor)

$$0\vec{a} = 0. \tag{2.6}$$

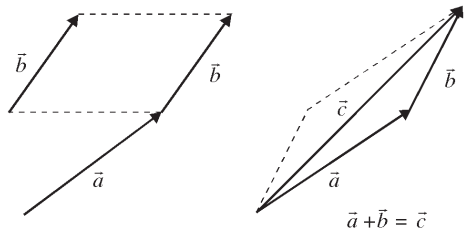
Deljenjem vektora $\vec{a}$ skalarom m dobija se vektor $\vec{c}$, čiji je intenzitet m puta manji od intenziteta vektora $\vec{a}$,

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{m}. \tag{2.7}$$

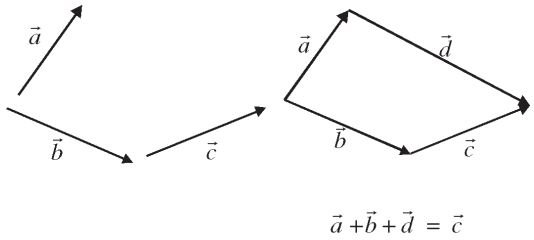
2.2 Sabiranje i oduzimanje vektora

Zbir dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definiše se geometrijskom konstrukcijom koja je prikazana na slici 2.3. Ovo je tzv. pravilo paralelograma za sabiranje vektora.

Paralelnim pomeranjem vektora $\vec{b}$, dok mu početak ne dodje na kraj vektora $\vec{a}$, odredjuje vektor $\vec{c}$, koji se proteže od početka vektora $\vec{a}$ do kraja vektora $\vec{b}$ i predstavlja zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Sl. 2.3: Sabiranje dva vektora



Sl. 2.4: Sabiranje više vektora

Ako se vrši sabiranje više vektora, onda se početak svakog vektora paralelno pomera na kraj prethodnog vektora. Zbirni vektor ima početak u početku prvog vektora, a kraj na kraju poslednjeg nanesenog vektora (sl. 2.4). Zbir konačnog broja vektora nezavisan je od redosleda kojim se sabiraju.

Za sabiranje vektora važe tri zakona:

- **komutativni zakon**:
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \tag{2.8}$$
- **distributivni zakon**:
$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}, \tag{2.9}$$
- **asocijativni zakon**:
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}. \tag{2.10}$$

Oduzimanje vektora $\vec{b}$ od vektora $\vec{a}$ može se shvatiti kao specijalni slučaj sabiranja. Naime, razlika $\vec{e}=\vec{a}-\vec{b}$ može da se napiše kao $\vec{e}=\vec{a}+(-\vec{b})$, što znači da je vektor $\vec{b}$ pomnožen skalarom (-1) koji mu samo menja smer. Vektor $(-\vec{b})$ dodaje se vektoru $\vec{a}$ po pravilu za sabiranje vektora (sl. 2.5).

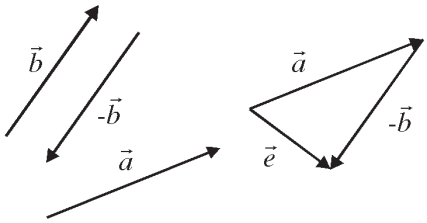
2.3 Množenje vektora

Definicija nekih složenih fizičkih veličina nameće potrebu za definisanjem skalarnog i vektorskog množenja vektora.

2.3.1 Skalarni proizvod

Skalarnim množenjem vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobija se skalarna veličina c

$$c=\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{2.11}$$



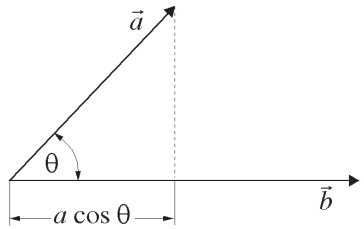
Sl. 2.5: Oduzimanje vektora

Kao što se iz (2.11) vidi, skalarni proizvod se simbolički označava tačkom izmedju vektora koji se skalarno množe. Rezultat takvog množenja je broj koji je jednak proizvodu intenziteta vektora $\vec{b}$ i projekcije vektora $\vec{a}$ na pravac vektora $\vec{b}$

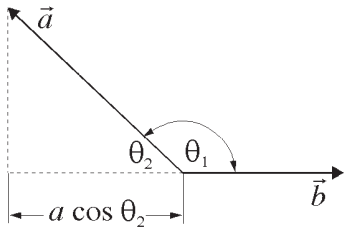
$$c = b \cdot a\cos(\vec{a},\vec{b}) = ba\cos\theta. \tag{2.12}$$

Ako je ugao izmedju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oštar, skalarni proizvod je pozitivan (sl. 2.6), a ako je taj ugao tup, skalarni proizvod je negativan (sl. 2.7)

$$c = ba\cos(\vec{a},\vec{b}) = ba\cos\theta_1 = -ba\cos\theta_2. \tag{2.13}$$

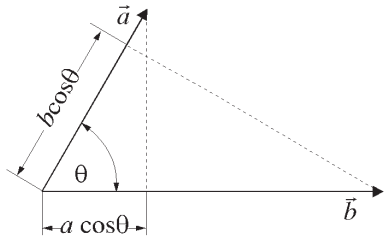


Sl. 2.6: Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ugao izmedju vektora oštar ($\theta < 90°$)



Sl. 2.7: Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ugao izmedju vektora tup ($\theta_1 > 90°$)

Za skalarni proizvod važe sledeći zakoni:



Sl. 2.8: Uz objašnjenje komutativnosti skalarnog proizvoda dva vektora

- **komutativni zakon**:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \tag{2.14}$$

ili

$$a \cdot b\cos\theta = b \cdot a\cos\theta, \tag{2.15}$$

što se vidi sa slike 2.8.

- **distributivni zakon**:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \tag{2.16}$$

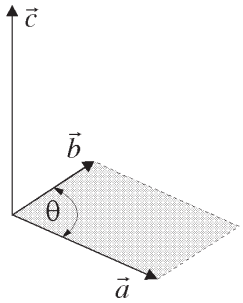
Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se preko njihovih komponenata može prikazati kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.17}$$

2.3.2 Vektorski proizvod

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ čini vektor $\vec{c}$, normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 2.9):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{2.18}$$



Sl. 2.9: Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Intenzitet ovog vektorskog proizvoda

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\vec{a}, \vec{b}) = ab \sin\theta \tag{2.19}$$

brojno je jednak površini paralelograma koju obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Smer vektora $\vec{c}$, po dogovoru, odredjuje se pravilom desnog zavrtnja ili pravilom desne ruke (sl. 2.10).

Po pravilu desnog zavrtnja, smer vektora $\vec{c}$ bio bi odredjen smerom napredovanja desnog zavrtnja pri njegovom zavrtanju za ugao θ (ugao izmedju pravaca vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$).

Pravilom desne ruke smer vektora $\vec{c}$ odredjuje se na sledeći način. Najpre se počeci vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedu u istu tačku, čime je definisana ravan koju oni obrazuju. Vektor $\vec{c}$ je normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako savijeni prsti desne ruke pokazuju smer obrtanja vektora $\vec{a}$ ka vektoru $\vec{b}$ za manji od dva moguća ugla, onda će palac pokazivati smer vektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (sl. 2.10b i c). Iz ovoga proizilazi da vektorski proizvod $\vec{b} \times \vec{a}$ ima suprotan znak od proizvoda $\vec{a} \times \vec{b}$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{2.20}$$

Vektorski proizvod, dakle, nije komutativan, ali zadovoljava distributivni zakon

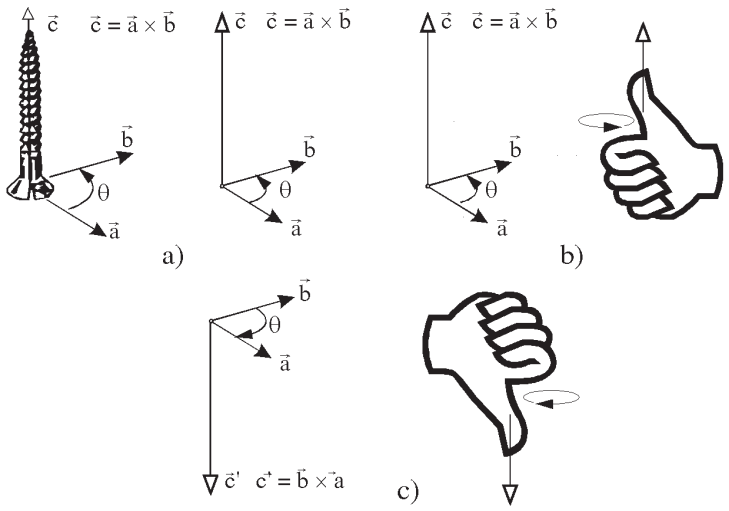
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \tag{2.21}$$

Vektorski proizvod $\vec{a} \times \vec{b}$ može se izraziti pomoću komponenata vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koristeći tri medjusobno upravna jedinična vektora koji definišu koordinatni sistem

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}) = \\ (\vec{\imath} \times \vec{\jmath})a_x b_y + (\vec{\imath} \times \vec{k})a_x b_z + (\vec{\jmath} \times \vec{k})a_y b_z + \\ (\vec{\jmath} \times \vec{\imath})a_y b_x + (\vec{k} \times \vec{\imath})a_z b_x + (\vec{k} \times \vec{\jmath})a_z b_y \end{aligned} \tag{2.22}$$

Za slučaj desnog koordinatnog sistema je

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$



Sl. 2.10: Odredjivanje smera vektora $\vec{c}$ pravilom desnog zavrtnja (a) i pravilom desne ruke (b i c)

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \vec{k},$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{\jmath} = \vec{\imath},$$
$$\vec{k} \times \vec{\imath} = -\vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath},$$

pa se za vektorski proizvod dobija

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{\imath}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \tag{2.23}$$

Vektorski proizvod se može jednostavnije izraziti preko determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

čijim se rešavanjem dobija izraz (2.23).

3. Kinematika materijalne tačke

3.1 Predmet proučavanja klasične mehanike

Mehanika je deo fizike koji proučava zakone kretanja tela, tj. promenu položaja tela u vremenu. U ovakva kretanja spadaju, na primer, kretanje planeta, automobila, projektila, itd. Mehanika se deli na kinematiku, dinamiku i statiku.

Kinematika proučava kretanje tela ne uzimajući u obzir uzroke koji dovode do tog kretanja. Ona operiše veličinama kao što su predjeni put, vreme, brzina i ubrzanje.

Dinamika proučava uzroke koji dovode do kretanja tela, tj. proučava kretanje tela pod dejstvom sila. Pored veličina koje se koriste u kinematici, dinamika operiše još i veličinama kao što su sila i masa.

Statika proučava uslove ravnoteže tela na koja deluju sile i momenti sila. Ako su poznati zakoni kretanja tela, onda se iz njih mogu ustanoviti i zakoni ravnoteže.

3.2 Mirovanje i kretanje

U mehanici je veoma važno da se zna da li posmatrano telo u toku vremena ostaje na istom mestu ili se pomera u odnosu na drugo telo ili posmatrača. Ako telo u toku vremena ostaje na istom mestu, kaže se da ono miruje ili se nalazi u stanju mirovanja. Ukoliko telo u toku posmatranja menja položaj u odnosu na drugo telo ili posmatrača, kaže se da se ono kreće ili nalazi u stanju kretanja. Prema tome, da bi se ocenilo da li se jedno telo kreće ili miruje, potrebno je da se njegov položaj poredi sa položajem okolnih tela za koje se smatra da miruju. Medjutim, ta ocena je vrlo nepouzdana. Na primer, čovek koji se nalazi u vozu koji se kreće, miruje u odnosu na voz, a kreće se u odnosu na kolosek. Tako se za čoveka jednom može reći da miruje, a drugi put da se kreće, u zavisnosti od toga da li se kretanje posmatra u odnosu na voz ili u odnosu na Zemlju. Dalje, kad bi i voz mirovao, onda bi se moglo zaista reći da čovek miruje u odnosu na Zemlju, ali se ne bi moglo tvrditi da on miruje u odnosu na Sunce, jer se Zemlja zajedno sa svim telima na njoj, kao što je poznato, okreće oko svoje ose i istovremeno oko Sunca. S druge strane, i Sunce se kreće u vasioni, a pošto najverovatnije veći ili manji delovi vasione vrše slična kretanja, može se zaključiti da u prirodi nema tela koje se ne bi kretalo i u odnosu na koje bi se moglo ustanoviti kretanje drugih tela uopšte. Zbog toga se može govoriti samo o *relativnom miru* i *relativnom kretanju*.

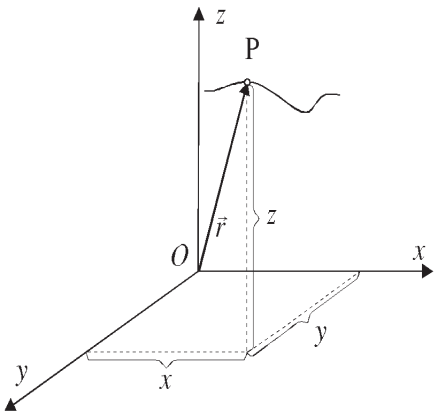
Često se pri proučavanju kretanja mogu zanemariti dimenzije tela i celo telo zameniti jednom tačkom konačne mase koja je jednaka stvarnoj masi tela. Takva tačka naziva se *materijalna tačka* i uvedena je radi jednostavnijeg objašnjenja zakona kretanja.

Položaj materijalne tačke odredjuje se u odnosu na neko telo koje se naziva *uporedno telo* ili *telo referencije*. To telo se nalazi u relativnom miru, a koordinatni sistem vezan za njega naziva se *uporedni sistem* ili *sistem referencije* položaja materijalne tačke. Najčešće se primenjuje Dekartov (Descartes) pravougli koordinatni sistem, medjutim, za detaljniju analizu položaja i kretanja materijalne tačke u nekim slučajevima je podesnije primeniti cilindrični ili sferni koordinatni sistem.

Prilikom kretanja materijalne tačke P po nekoj putanji (sl. 3.1), njen položaj se u svakom trenutku može odrediti u Dekartovom koordinatnom sistemu pomoću koordinata x, y i z ili pomoću radijus vektora $\vec{r}$, čiji je početak u koordinatnom početku O, a kraj u tački P.

Kada se materijalna tačka kreće, njene koordinate se u toku vremena menjaju. U opštem slučaju, kretanje materijalne tačke je odredjeno trima skalarnim jednačinama

$$x = x(t),$$



Sl. 3.1: Odredjivanje položaja materijalne tačke

$$y = y(t), \qquad (3.1)$$
$$z = z(t),$$

koje su ekvivalentne vektorskoj jednačini

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Intenzitet ovog radijus vektora se može izraziti kao

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3.2)$$

Broj nezavisnih koordinata koje u potpunosti odredjuju položaj materijalne tačke naziva se *broj stepeni slobode*. Ako se materijalna tačka kreće u prostoru, ona raspolaže sa tri stepena slobode (koordinate x, y i z), ako se kreće u ravni sa dva, a ako se kretanje vrši po pravoj liniji, materijalna tačka ima jedan stepen slobode.

Kao što se vidi sa slike 3.1, materijalna tačka pri kretanju opisuje krivu koja se naziva *putanja* ili *trajektorija*. Prema tome, *pod putanjom ili trajektorijom materijalne tačke podrazumeva se niz uzastopnih tačaka u prostoru u kojima se ona nalazi u toku svoga kretanja. Deo putanje koji materijalna tačka predje u odredjenom vremenskom intervalu naziva se put.*

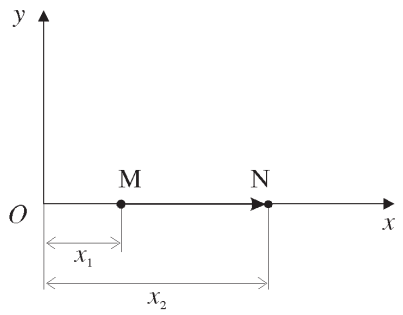
Kretanja u prirodi se mogu podeliti na *translatorna* (*linearna*) i *rotaciona* (*obrtna kretanja*). Pri translatornom kretanju duž koja spaja bilo koje dve tačke tela ostaje sama sebi paralelna (putanje svih tačaka tela imaju isti oblik i dužinu). Kod rotacionog kretanja tačke opisuju koncentrične krugove oko neke tačke ili ose. Proizvoljno kretanje tela se može predstaviti kao kombinacija translatornog i rotacionog kretanja.

3.3 Pravolinijsko kretanje

3.3.1 Srednja i trenutna brzina

U prethodnom odeljku je naglašeno da se položaj materijalne tačke (ili tela) u prostoru može odrediti korišćenjem pravouglog koordinatnog sistema. Kada se materijalna tačka kreće u prostoru njene projekcije se pravolinijski kreću duž triju osa. Prema tome, njeno stvarno kretanje se može rekonstruisati iz kretanja projekcija. Zbog toga je od interesa da se razmotri kretanje materijalne tačke duž prave linije, koje je u fizici poznato pod nazivom *pravolinijsko kretanje*.

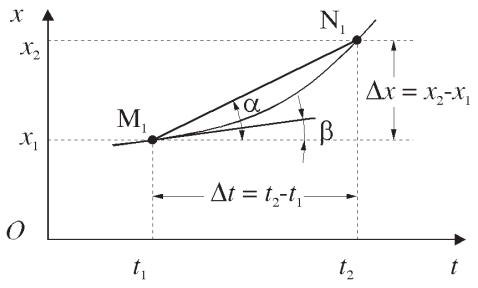
Neka se materijalna tačka kreće duž x-ose. U trenutku t_1 ona se nadje u tački M, čija je koordinata x_1, a u trenutku t_2 u tački N sa koordinatom x_2 (sl. 3.2). Pomeranje materijalne tačke u ovom slučaju se definiše vektorom $\vec{MN}$, čiji je intenzitet $x_2 - x_1 = \Delta x$, a koji se naziva pomeraj. Srednja brzina $<v>$



Sl. 3.2: Materijalna tačka koja se kreće duž x-ose

kretanja materijalne tačke definiše se kao količnik pomeraja Δx i vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$

$$<v> = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.3}$$



Sl. 3.3: Zavisnost koordinate od vremena pri kretanju materijalne tačke

Srednja brzina se može odrediti i iz zavisnosti koordinate x od vremena t. Neka je ta zavisnost oblika prikazanog na slici 3.3. U tom slučaju brojna vrednost srednje brzine se može odrediti iz nagiba tetive M_1N_1 ($\tan\alpha$)

$$<v> = \tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Izraz 3.3 se može napisati kao

$$x_2 - x_1 = <v>\ (t_2 - t_1), \tag{3.5}$$

ili, ako se uzme da je za $t_1 = 0$ (početak posmatranja) $x_1 = x_o$, a za $t_2 = t$ (t—proizvoljno vreme) koordinata $x_2 = x$, kao

$$x - x_o = <v>\ t. \tag{3.6}$$

Ako se u početku posmatranja ($t_1 = 0$) materijalna tačka nalazila u koordinatnom početku, tada je $x_o = 0$, pa izraz (3.6) dobija oblik

$$x = <v>\ t. \tag{3.7}$$

Materijalna tačka prilikom kretanja po pravolinijskoj putanji može u jednakim vremenskim intervalima da prelazi jednake ili različite puteve. Kada prelazi jednake puteve, onda je to *uniformno kretanje*. Ovakvom vrstom kretanja teže da se kreću sva tela prepuštena sama sebi. Ta pojava poznata je pod nazivom inercija. U tom slučaju odnos $\Delta x/\Delta t$ (brzina) je u bilo kom vremenskom intervalu konstantan.

Kada materijalna tačka u jednakim vremenskim intervalima prelazi različite puteve, radi se o *promenljivom kretanju*. U ovom slučaju brzina u svakoj tački putanje ima različitu vrednost. Brzina materijalne tačke u datom trenutku naziva se *trenutna brzina*. Na primer, trenutna brzina materijalne tačke prikazane na slici 3.2 odredjuje se na sledeći način. Kao što je već naglašeno, srednja brzina izmedju tačaka M i N se definiše kao odnos pomeraja Δx i vremenskog intervala Δt. Neka se sada tačka N približava tački M, pri čemu se srednja brzina računa za sve manje pomeraje i sve manje intervale vremena.

Trenutna brzina v u tački M definiše se kao granična vrednost srednje brzine kada je tačka N sve bliža tački M. Prema tome, trenutna brzina predstavlja graničnu vrednost (*limes*) kojoj teži vrednost srednje brzine kada interval vremena teži nuli ($\Delta t \to 0$)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{3.8}$$

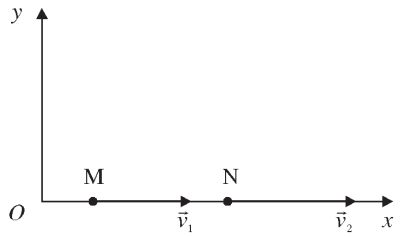
Dakle, trenutna brzina je jednaka diferencijalnom količniku predjenog puta i vremena (Njutnova definicija prvog izvoda).

Pojam trenutne brzine se može razumeti i pomoću slike 3.3. Naime, ako se tačka N_1 približava tački M_1, u graničnom slučaju tetiva će preći u tangentu u tački M_1, čiji nagib ($\tan\beta$) daje intenzitet trenutne brzine. Prema tome, intenzitet trenutne brzine u ma kojoj tački grafika koordinate u funkciji vremena jednak je nagibu tangente u toj tački.

3.3.2 Srednje i trenutno ubrzanje

Iz iskustva je poznato da se brzina materijalne tačke (ili tela), osim u specijalnim slučajevima, menja tokom kretanja. Veličina koja karakteriše ovakvu vrstu kretanja naziva se *ubrzanje*.

Da bi se došlo do izraza za ubrzanje, posmatraće se kretanje materijalne tačke duž x-ose (sl. 3.4), kao i grafik trenutne brzine v u funkciji vremena t (sl. 3.5). Vektor $\vec{v}_1$ (sl. 3.4) predstavlja trenutnu brzinu u tački M, a $\vec{v}_2$ u tački N.

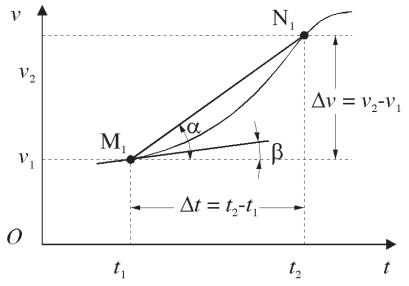


Sl. 3.4: Materijalna tačka koja se kreće duž x-ose

Intenzitet srednjeg ubrzanja materijalne tačke prilikom njenog kretanja od tačke M do N definiše se kao količnik promene brzine i odgovarajućeg vremena

$$<a>= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{3.9}$$

gde su t_1 i t_2 vremena koja odgovaraju brzinama v_1 i v_2. Srednje ubrzanje je dato nagibom tetive M_1N_1 ($\tan\alpha$) (sl. 3.5).



Sl. 3.5: Zavisnost brzine od vremena pri kretanju materijalne tačke

Trenutno ubrzanje a materijalne tačke, koje predstavlja ubrzanje u nekom trenutku ili nekoj tački njene putanje, definiše se na sličan način kao trenutna brzina. Neka se tačka N približava tački M (sl. 3.4) i pri tome računa srednje ubrzanje za sve kraće i kraće vremenske intervale. Trenutno ubrzanje a

u tački M predstavljaće graničnu vrdnost (*limes)* koju dostiže srednja vrednost ubrzanja kada interval vremena teži nuli

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.10}$$

Iz grafika trenutne brzine u funkciji vremena (sl. 3.5) brojna vrednost trenutnog ubrzanja u tački M_1 odredjena je nagibom tangente ($\tan\beta$) u toj tački. Prema tome, trenutno ubrzanje u ma kojoj tački grafika brzine u funkciji vremena jednako je nagibu tangente na grafik u toj tački.

3.3.3 Izražavanje puta i brzine u integralnom obliku

Iz dva prethodna odeljka se vidi da se trenutna brzina može izraziti kao $v = dx/dt$, a ubrzanje kao $a = dv/dt$. Ovi izrazi važe kada je koordinata x funkcija vremena. Moguće su i obrnute operacije. Ako je zadato ubrzanje a u funkciji vremena, može se odrediti brzina v u funkciji vremena, a ako se zna brzina u funkciji vremena, može se odrediti koordinata x. Ovo se može izvesti korišćenjem integralnog računa.

Ako je ubrzanje dato u funkciji vremena, tada se izraz (3.10) može napisati kao

$$dv = a(t)dt. \tag{3.11}$$

Ako se ovaj izraz integrali, za brzinu se dobija

$$v = \int a(t)dt + c_1, \tag{3.12}$$

gde je c_1 integraciona konstanta.

Ako je brzina $v(t)$ data u funkciji vremena, izraz (3.8) se može napisati u obliku

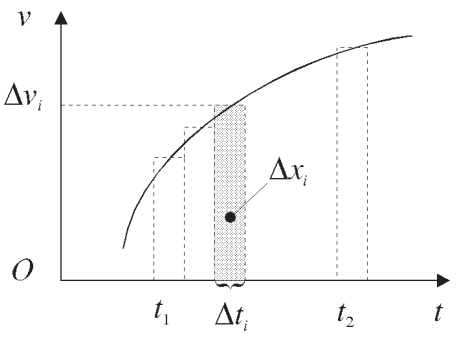
$$dx = v(t)dt. \tag{3.13}$$

Integraljenjem (3.13) za x se dobija

$$x = \int v(t)dt + c_2, \tag{3.14}$$

gde je c_2 integraciona konstanta.

Koordinata i brzina materijalne tačke mogu se izraziti preko odredjenog integrala. Da bi se to pokazalo, posmatraće se grafik zavisnosti brzine od vremena (sl. 3.6). Posmatranje se vrši u intervalu vremena $t_2 - t_1$.



Sl. 3.6: Brzina materijalne tačke u funkciji vremena

Interval na slici 3.6 izdeli se na male intervale širine Δt_i, gde indeks $i = 1, 2, 3, \ldots$ odgovara broju konkretnog intervala. Vertikalne isprekidane linije na slici predstavljaju vrednost srednje brzine za dati vremenski interval. Pomeraj za svaki vremenski interval Δt_i izražava se veličinom Δx_i. Na osnovu izraza (3.4) Δx_i se može napisati u obliku

$$\Delta x_i = <v_i> \Delta t_i. \tag{3.15}$$

Prema tome, pomeraj za bilo koji mali vremenski interval Δt_i jednak je proizvodu $<v_i>$ i Δt_i, tj. brojno je jednak površini pravougaonika čije su stranice $<v_i>$ i Δt_i (zasenčena površina na slici 3.6). Ukupan pomeraj u intervalu t_1 i t_2 jednak je zbiru pomeraja za sve razmatrane intervale vremena

$$x_2 - x_1 = \sum_{t_1}^{t_2} <v_i> \Delta t_i, \tag{3.16}$$

gde x_1 označava koordinatu materijalne tačke u trenutku t_1, a x_2 u trenutku t_2. Ukupan pomeraj $x_2 - x_1$ je jednak zbiru površina svih pravougaonika na slici 3.6.

Da bi se postigla što veća tačnost pri izračunavanju $x_2 - x_1$, potrebno je da se vremenski interval $t_2 - t_1$ podeli na što kraće intervale. Može se pretpostaviti da je Δt_i blisko nuli, tj. da je izvršeno deljenje na beskonačan broj intervala. U tom slučaju, površina svih tih beskonačno uskih pravougaonika je jednaka površini ispod krive na slici 3.6. Tako je pomeranje u ma kom vremenskom intervalu jednako površini izmedju grafika brzine u funkciji vremena i vremenske ose, ograničene vertikalnim linijama na početku i kraju intervala i može se izraziti na sledeći način:

$$x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} <v_i> \Delta t_i, \tag{3.17}$$

ili, tačnije

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt, \tag{3.18}$$

gde je vremenski interval označen sa dt. Srednja brzina $<v>$ za tako mali vremenski interval dt poklapa se sa trenutnom brzinom $v(t)$ u datom trenutku, koja je funkcija vremena.

Na analogan način se može podeliti površina pod grafikom ubrzanja u funkciji vremena. Na taj način se dobijaju pravougaonici visine $<a_i>$ i širine Δt_i, pri čemu je promena brzine za dati interval data izrazom

$$\Delta v_i = <a_i> \Delta t_i. \tag{3.19}$$

Prema tome, ako je zadata veličina a kao funkcija vremena t u intervalu $t_2 - t_1$ tada se taj interval može podeliti na mnoštvo malih intervala Δt_i (slično kao na slici 3.6), pa je ukupna promena brzine data izrazom

$$v_2 - v_1 = \sum_{t_1}^{t_2} <a_i> \Delta t_i, \tag{3.20}$$

gde je v_1 brzina u trenutku t_1, a v_2 brzina u trenutku t_2. Za slučaj kada $\Delta t \to 0$, ukupna promena brzine se može izraziti na sledeći način:

$$v_2 - v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} <a_i> \Delta t_i, \tag{3.21}$$

ili

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt. \tag{3.22}$$

Izraz (3.22) omogućava da se odredi brzina v_2 u nekom trenutku t_2 ako je poznata brzina v_1 u trenutku t_1 i ako je zadato ubrzanje kao funkcija vremena.

3.3.4 Pravolinijsko kretanje sa konstantnim ubrzanjem

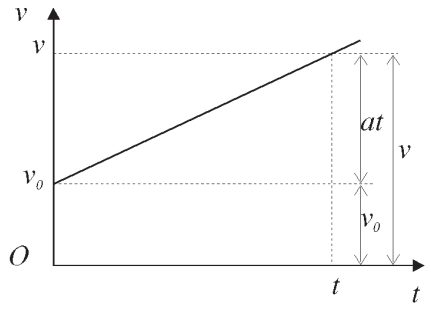
Najprostiji oblik ubrzanog kretanja je pravolinijsko kretanje sa konstantnim ubrzanjem $a(t) = const.$ U tom slučaju se u jednakim vremenskim intervalima brzina menja u jednakim iznosima. Pošto ubrzanje ne zavisi od vremena, izraz (3.12) se može napisati u obliku

$$v = at + c_1. \tag{3.23}$$

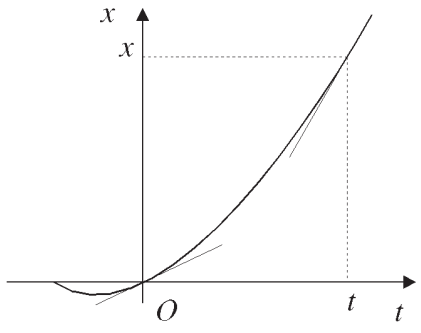
Integraciona konstanta c_1 se može odrediti iz graničnih uslova. Naime, za $t=0$ (početak posmatranja) $v=v_o$ (v_o početna brzina) sledi da je $v_o=c_1$, pa gornji izraz dobija konačan oblik

$$v = v_o + at. \tag{3.24}$$

Zavisnost brzine od vremena za pravolinijsko kretanje sa konstantnim ubrzanjem prikazana je na slici 3.7. Sa slike se vidi da ordinata v za vreme t predstavlja zbir dva odsečka: jedan, dužine v_o, jednak je početnoj brzini, a drugi, dužine at, promeni brzine za vreme t.



Sl. 3.7: Zavisnost brzine od vremena za kretanje sa konstantnim ubrzanjem



Sl. 3.8: Zavisnost koordinate od vremena za kretanje sa konstantnim ubrzanjem

Potrebno je naći izraz za koordinatu u funkciji vremena. Pošto se brzina u funkciji vremena može izraziti kao

$$v(t) = v_o + at, \tag{3.25}$$

njenom zamenom u izrazu (3.14) dobija se

$$x = \int (v_o + at)dt + c_2 = v_o t + \frac{1}{2}at^2 + c_2. \tag{3.26}$$

Integraciona Konstanta c_2 se nalazi iz graničnih uslova. Za $t=0$ (početak posmatranja) $x=x_o$ (x_o— početni položaj). Zamenom u izrazu (3.26) dobija se da je $c_2=x_o$. U tom slučaju se za x dobija

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2. \tag{3.27}$$

Ako se koordinatni početak poklapa sa početnim položajem, onda je $x_o=0$, pa se za koordinatu x posle vremena t dobija izraz

$$x = v_o t + \frac{1}{2}at^2. \tag{3.28}$$

Na slici 3.8 je grafik zavisnosti date izrazom (3.27). Kriva je parabola. Nagib tangente za $t=0$ jednak je početnoj brzini v_o, a nagib tangente u trenutku t jednak je brzini v u tom trenutku. Sa slike se vidi da nagib neprekidno raste i merenja bi pokazala da je brzina porasta, tj. ubrzanje konstantno.

Brzina u funkciji koordinate može da se nadje iz izraza za ubrzanje (3.10), koji može da se napiše u obliku

$$a = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = v\frac{dv}{dx},$$

ili

$$vdv = adx. \tag{3.29}$$

Ako se integrali ovaj izraz dobija se

$$\frac{v^2}{2} = \int adx + c_3 = ax + c_3. \tag{3.30}$$

Integraciona konstanta c_3 odredjuje se iz graničnih uslova, uzimajući da za $x = x_o$ materijalna tačka ima početnu brzinu v_o, pa je

$$c_3 = \frac{v_o^2}{2} - ax_o. \tag{3.31}$$

Zamenom u izraz (3.30), za brzinu se dobija sledeći izraz:

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o). \tag{3.32}$$

Ako se uzme da je $x_o = 0$, onda je

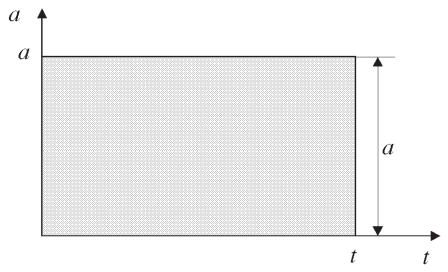
$$v^2 = v_o^2 + 2ax. \tag{3.33}$$

Do ovog izraza se može doći i eliminacijom t iz izraza (3.24) i (3.28).

Specijalan slučaj kretanja sa konstantnim ubrzanjem je slučaj kada je ono jednako nuli. U tom slučaju brzina je konstantna ($v = const.$), pa jednačina kretanja ima oblik

$$x = vt. \tag{3.34}$$

Na slici 3.9 data je zavisnost ubrzanja od vremena. Površina ispod grafika i izmedju $t = 0$ i $t = t$ jednaka je at, odnosno jednaka je promeni brzine $v - v_o = at$, što je isto kao u izrazu (3.24). Dakle, kod pravolinijskog kretanja sa konstantnim ubrzanjem promena brzine može veoma jednostavno da se odredi sa grafika.



Sl. 3.9: Zavisnost ubrzanja od vremena

3.3.5 Slobodno padanje

Slobodno padanje predstavlja poseban slučaj pravolinijskog kretanja sa konstantnim ubrzanjem. To je kretanje koje se vrši pod dejstvom sile teže, tj. gravitacione sile. Slobodno padanje može da se ostvari samo u vakuumu. Kada se telo kreće u vazduhu, onda na njega pored sile teže deluje i sila trenja. Medjutim, ako telo pada sa male visine, tada se uticaj trenja može zanemariti, pa se padanje u vazduhu približava po svojim osobinama slobodnom padanju. Vrednost ubrzanja g koje telo dobije usled dejstva sile teže zavisi od geografske širine i nadmorske visine. Tako je na polu ubrzanje $g_p = 9,83\,ms^{-2}$, a na ekvatoru $g_e = 9,78\,ms^{-2}$, dok je na našoj geografskoj širini oko $9,81\,ms^{-2}$. Dogovorom je uzeto tzv. **normalno ubrzanje** pod uticajem Zemljine teže, koje iznosi $g_n = 9,80665\,ms^{-2}$.

Vrednost ubrzanja zemljine teže zavisi od visine iznad Zemljine površine. Medjutim, promene za visine od nekoliko metara su male tako da se mogu zanemariti.

Iz izraza (3.24) i (3.25) za $v_o = 0$, $x = h$, dobija se

$$v = gt, \tag{3.35}$$

$$h = \frac{gt^2}{2}. \tag{3.36}$$

Eliminacijom t iz izraza (3.35) i (3.36) dobija se konačan izraz za brzinu

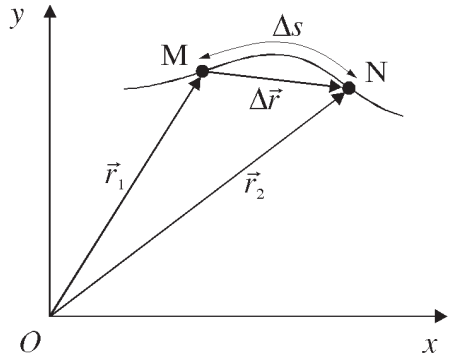
$$v = \sqrt{2gh}. \tag{3.37}$$

Iz ovog izraza se vidi da pri padu tela sa visine h, ono dostigne brzinu $\sqrt{2gh}$.

3.4 Krivolinijsko kretanje

Do sada je bilo reči o kretanju duž jedne prave—pravolinijskom kretanju. Ovde će se razmotriti kretanje tela po krivolinijskoj putanji koja leži u nepokretnoj ravni, na primer lopte koja se kreće kroz vazduh, granate izbačene iz orudja, tela koje rotira pričvršćeno na kraju užeta, Meseca ili satelita oko Zemlje, planeta oko Sunca...

Neka se materijalna tačka kreće u ravni, pri tome opisujući putanju prikazanu na slici 3.10.



Sl. 3.10: Putanja materijalne tačke u ravni xy

U trenutku t_1 ona se nalazi u tački M, a u trenutku t_2 u tački N. Kretanje materijalne tačke može se opisati pomoću koordinata x i y ili pomoću vektora položaja (radijus vektora). Vektor $\vec{r}_1$ predstavlja vektor položaja u trenutku t_1, a $\vec{r}_2$ u trenutku t_2. Pomeraj materijalne tačke iz M u N, u toku vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$ odredjen je vektorom pomeraja $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{3.38}$$

i predstavlja pomeranje za vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$. Vektori $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ mogu da se izračunaju preko jediničnih vektora, tj.

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}, \tag{3.39}$$

gde su x_1, y_1 i x_2, y_2 koordinate tačaka M i N, respektivno. Zamenom (3.39) u (3.38) za vektor pomeraja se dobija

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}. \tag{3.40}$$

Ako se posmatra kretanje u prostoru, tada se $\Delta\vec{r}$ može izraziti na sledeći način:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

gde z_1 i z_2 predstavljaju položaje materijalne tačke duž z-ose u trenucima t_1 i t_2, respektivno. Ako se kretanje vrši duž x-ose, tada je $y_2 - y_1 = 0$ i $z_2 - z_1 = 0$, pa je vrednost pomeraja $\Delta r = x_2 - x_1$, što se poklapa sa pomerajem kod pravolinijskog kretanja.

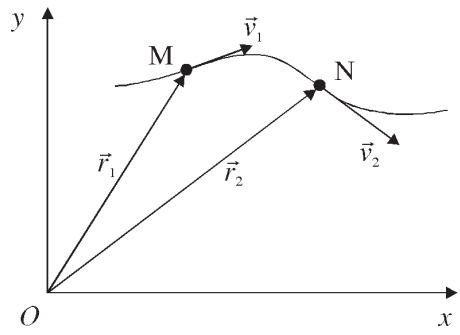
Vektor srednje brzine $<\vec{v}>$ za interval vremena Δt može se izraziti kao

$$<\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{3.41}$$

Pošto vektor $<\vec{v}>$ predstavlja količnik vektora $\Delta\vec{r}$ i skalara Δt, njegov smer se poklapa sa smerom vektora pomeraja $\Delta\vec{r}$, a intenzitet mu je $\Delta r/\Delta t$. Razmotriće se slučaj kada $\Delta t \to 0$, tako da i rastojanje izmedju M i N teži nuli. Tada vektor trenutne brzine predstavlja graničnu vrednost (*limes*) srednje brzine

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{3.42}$$

U bilo kojoj tački putanje brzina ima pravac tangente na tu putanju, kao što je prikazano na slici 3.11. Može se zapaziti da srednja brzina, odredjena preko vektora pomeraja $\Delta\vec{r}$ (sl. 3.10), nije jednaka odnosu



Sl. 3.11: Vektori brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ u trenucima t_1 i t_2, redom

predjenog puta Δs i vremenskog intervala Δt. U nekim slučajevima ove brzine se poklapaju (na primer kod pravolinijskog kretanja), ali su u opštem slučaju različite. Medjutim, u graničnom slučaju, kada $\Delta t \to 0$, $\Delta r \to \Delta s$, tako da se trenutne brzine izražene preko Δr i Δs u bilo kom trenutku poklapaju.

Trenutna brzina kretanja materijalne tačke u ravni može se izraziti preko jediničnih vektora

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}.$$

Intenzitet vektora brzine je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{3.43}$$

gde $v_x = dx/dt$ i $v_y = dy/dt$ predstavljaju projekcije brzine na x i y osu, respektivno.

Ubrzanje se razmatra na analogan način. Vektor srednjeg ubrzanja $<\vec{a}>$ za interval vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ dat je izrazom

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}, \tag{3.44}$$

gde je $\Delta\vec{v}$ vektor promene brzine za vremenski interval Δt. Zapaža se da se u mnogim slučajevima (na primer, u onom prikazanom na slici 3.11) vektor $\vec{v}_2$ ne poklapa po pravcu sa $\vec{v}_1$. Prema tome, $<\vec{a}>$ može da ima pravac koji se ne poklapa sa vektorima $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Sem toga, i kada su brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ jednake po intenzitetu, a različite po pravcu, njihova razlika nije jednaka nuli. Iz ovoga proizilazi da ubrzanje može nastati kako na račun promene vrednosti brzine, tako i na račun promene njenog pravca (ili na račun promene i jednog i drugog).

Vektor trenutnog ubrzanja je jednak vektoru srednjeg ubrzanja kada vremenski interval teži nuli

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3.45}$$

Trenutno ubrzanje može se izraziti i preko jediničnih vektora kao

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath},$$

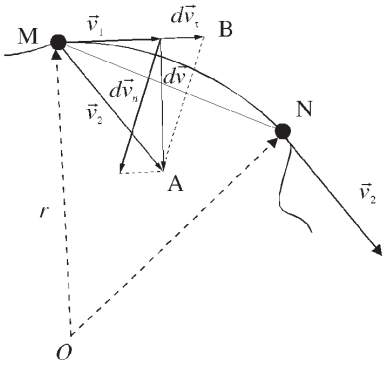
dok je njegov intenzitet

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{3.46}$$

Poznato je da se svaki mali deo krive može smatrati lukom kružnice odredjenog poluprečnika. Zato je, da bi se odredilo ubrzanje na odredjenom delu krivolinijske putanje, neophodno da se odabere odgovarajući poluprečnik te kružnice r, kao i položaj njenog centra O. Poluprečnik r se naziva poluprečnik krivine krive u datom delu, a O je centar krivine. U tački M vektor brzine je $\vec{v}_1$, a u tački N $\vec{v}_2$ (sl. 3.12). Brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ su brzine u dva susedna beskonačno bliska momenta vremena. Ubrzanje se odredjuje kao promena brzine za tako mali vremenski interval dt. U tom cilju vektor $\vec{v}_2$ se translira paralelno samom sebi do tačke M (predstavljeno vektorom $\vec{MA}$), a vektor $d\vec{v}$ se odredjuje metodom paralelograma. Vektor

$d\vec{v}$ predstavlja geometrijski priraštaj brzine za vreme dt. Njegovim razlaganjem se dobijaju komponente $d\vec{v}_\tau$ i $d\vec{v}_n$. Vektor $d\vec{v}_\tau$ karaktriše promenu brzine samo po pravcu i brojno je jednak intenzitetu priraštaju brzine dv. Pravac ovog vektora je pravac tangente na putanju. Deljenjem $d\vec{v}_\tau$ sa dt dobija se tangencijalno ubrzanje

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}. \tag{3.47}$$



Sl. 3.12: Uz objašnjenje tangencijalnog i normalnog ubrzanja

Sada će se razmotriti vektor $d\vec{v}_n$, intenziteta $\overline{AB}$, koji karakteriše promenu brzine po pravcu. Kroz tačke M i N (sl. 3.12) povuku se normale na pravce vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. One se seku u tački O. Beskonačno mali luk krivine MN može se smatrati kao luk kružnice poluprečnika $OM = r$. Kružnica čiji se luk poklapa sa elementom krivine u datoj tački (krug je povučen kroz tri beskonačno bliske tačke krivine) naziva se *krug krivine*, a centar ovog kruga—*centar krivine*.

Trouglovi MON i AMB su slični, jer su oba ravnokraka i imaju po jedan isti ugao. Prema tome, odgovarajuće strane su im proporcionalne:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{MA}{OM},$$

ili

$$\left|\frac{dv_n}{v_1 dt}\right| = \frac{v_2}{r}; \quad \left|\frac{dv_n}{dt}\right| = \frac{v_1 v_2}{r}. \tag{3.48}$$

Ako se uzme da je $v_1 \approx v_2 = v$, gornji izraz se može napisati u obliku

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{3.49}$$

Ovo je izraz za *normalno* ili *centripetalno ubrzanje*. Dakle, ukupno ubrzanje $\vec{a}$ jednako je zbiru tangencijalnog i normalnog ubrzanja

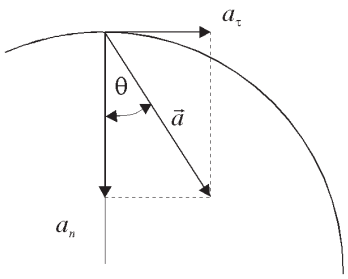
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{3.50}$$

Vektor $\vec{a}_\tau$ je projekcija vektora ukupnog ubrzanja $\vec{a}$ na pravac kretanja. Ovo ubrzanje menja brzinu kretanja samo po intenzitetu i ima isti ili suprotan smer od brzine, u zavisnosti od toga da li se radi o ubrzanom ili usporenom kretanju. Ako je kretanje po bilo kakvoj krivolinijskoj putanji uniformno, tada je $a_\tau = 0$. Vektor normalnog ubrzanja $\vec{a}_n$ predstavlja projekciju ukupnog ubrzanja $\vec{a}$ na pravac normalan na pravac brzine, tj. u pravcu radijus vektora $\vec{r}$. Normalno ubrzanje dovodi samo do promene brzine po pravcu i kod pravolinijskog kretanja jednako je nuli.

Vrednost ukupnog ubrzanja u datoj tački putanje može se odrediti iz vrednosti tangencijalnog i normalnog ubrzanja

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{3.51}$$

Takodje se može odrediti i ugao θ izmedju ukupnog ubrzanja i komponenata ubrzanja (sl. 3.13).



Sl. 3.13: Pravac tangencijalnog ubrzanja $\vec{a}_\tau$, normalnog ubrzanja $\vec{a}_n$ i ukupnog ubrzanja $\vec{a}$

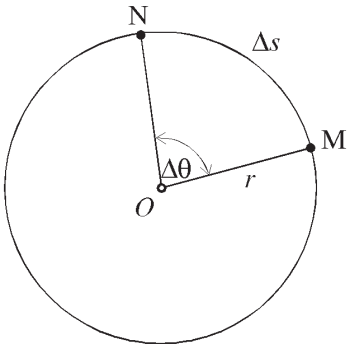
3.4.1 Kružno kretanje

Specijalan slučaj krivolinijskog kretanja je kružno kretanje (sl. 3.14). Ako materijalna tačka za vremenski interval Δt predje put Δs, tada odnos ugaonog pomeraja $\Delta\theta$ i vremenskog intervala Δt predstavlja *srednju ugaonu brzinu* $<\omega>$

$$<\omega>=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{3.52}$$

U graničnom slučaju, kada $\Delta t \to 0$ dobija se ugaona brzina u datom trenutku (*trenutna ugaona brzina*) ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{3.53}$$



Sl. 3.14: Uz objašnjenje kružnog kretanja

Ako su ω_1 i ω_2 ugaone brzine u trenucima t_1 i t_2, tada odnos

$$<\alpha>=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{3.54}$$

predstavlja *srednje ugaono ubrzanje*, a granična vrednost

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{3.55}$$

ugaono ubrzanje u datom trenutku (*trenutno ugaono ubrzanje*).

Veze izmedju linearnih i ugaonih veličina koje karakterišu kretanje materijalne tačke po krugu mogu se izraziti na sledeći način. Ako se sa s označi luk koji materijalna tačka opiše krećući se po krugu poluprečnika r, načinivši ugaoni pomeraj θ, važi

$$s = r\theta; \quad v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega. \tag{3.56}$$

Tangencijalno i normalno ubrzanje mogu se izraziti kao

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \tag{3.57}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2. \tag{3.58}$$

Pri konstantnom ugaonom ubrzanju ($\alpha = const.$), izrazi za ugaonu brzinu i ugaoni pomeraj imaju oblik

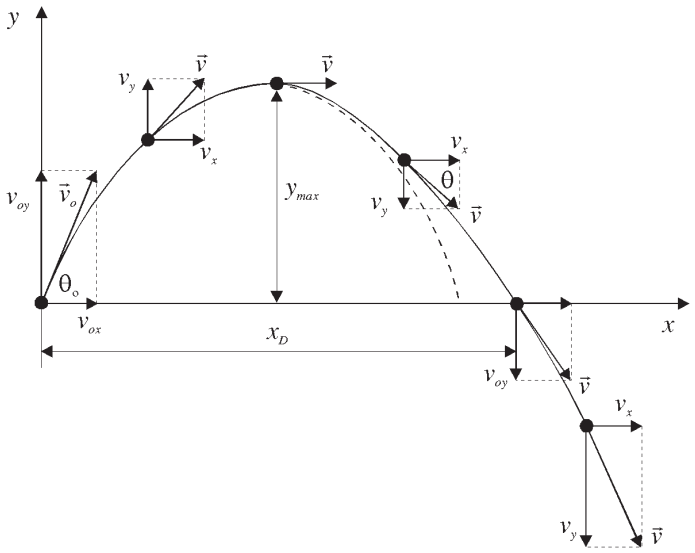
$$\omega = \omega_o + \alpha t; \quad \theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \tag{3.59}$$

gde je ω_o ugaona brzina u početnom trenutku $t=0$.

Ugaona brzina izražava se vektorom $\vec{\omega}$, čiji je pravac duž ose rotacije, a smer se odredjuje pravilom desnog zavrtnja ili desne ruke.

3.4.2 Hitac

Kretanje pri kome je telu saopštena početna brzina, a zatim mu prepušteno da se kreće pod uticajem gravitacione sile, naziva se hitac. Primer za ovakvo kretanje je bačena lopta, projektil izbačen iz topa, bomba puštena iz aviona, raketa posle utroška goriva i sl.



Sl. 3.15: Putanja tela koje je izbačeno pod uglom θ_o u odnosu na horizont sa početnom brzinom $\vec{v}_o$

Na slici 3.15 predstavljena je putanja hica. Početak koordinatnog sistema postavljen je u tački gde telo počinje svoj slobodni let i taj trenutak je uzet kao početak posmatranja, tj. $t = 0$. Brzina u koordinatnom početku predstavljena je vektorom $\vec{v}_o$, koji se naziva *vektor početne brzine*. Ugao θ_o pod kojim je izbačeno telo naziva se *ugao elevacije*. Početna brzina v_o može se razložiti na horizontalnu komponentu $v_{ox} = v_o \cos\theta_o$ i vertikalnu komponentu $v_{oy} = v_o \sin\theta_o$. Pošto je horizontalna komponenta brzine konstantna, u svakom trenutku imaće vrednost

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos\theta_o. \tag{3.60}$$

Kretanje duž y-ose odgovara jednako usporenom kretanju, pa je vertikalna komponenta brzine u funkciji vremena data izrazom

$$v_y = v_{oy} - gt = v_o sin\theta_o - gt. \tag{3.61}$$

Rezultatntna brzina kretanja hica se dobija vektorskim sabiranjem ovih komponenata, a njen intenzitet je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{3.62}$$

Koordinate hica u funkciji vremena su date sledećim izrazima:

$$x = v_o t \cos\theta_o, \tag{3.63}$$

$$y = v_o t \sin\theta_o - \frac{1}{2} g t^2. \tag{3.64}$$

Jednačina kretanja hica se dobija iz izraza (3.63) i (3.64) eliminacijom t

$$y = x \tan\theta_o - \frac{g x^2}{2 v_o^2 \cos^2\theta_o}. \tag{3.65}$$

Veličine v_o, $\tan\theta_o$, $cos\theta_o$ i g su konstantne, tako da gornja jednačina ima oblik

$$y = ax - bx^2 \tag{3.66}$$

i predstavlja jednačinu parabole.

Najvažniji parametri hica su domet, ugao elevacije i maksimalna visina. Domet hica x_D se nalazi iz izraza (3.65), za $x = x_D$ i $y = 0$

$$x_D = \frac{v_o^2}{g} 2 \sin\theta_o \cos\theta_o = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\theta_o. \tag{3.67}$$

Za svaku vrednost početne brzine postoji odredjeni ugao elevacije za koji hitac ima najveći domet. On se dobija diferenciranjem izraza (3.67) po uglu i izjednačavanjem dobijenog izvoda sa nulom

$$\frac{dx_D}{d\theta_o} = \frac{2v_o^2}{g} \cos 2\theta_o = 0 \tag{3.68}$$

Iz gornjeg izraza se može zaključiti da se najveći domet postiže kada je $\cos 2\theta_o = 0$, odnosno za ugao elevacije od 45°. Za svaku drugu vrednost dometa postoje dva komplementarna ugla θ_o za koja se on može posići.

Maksimalna visina hica $y = y_{max}$ se odredjuje iz uslova da je u najvišoj tački putanje $v_y = 0$. Iz izraza (3.61), vreme t za koje telo dostigne najveću tačku putanje je

$$t = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}. \tag{3.69}$$

Zamenom izraza (3.69) u (3.63) nalazi se maksimalna visina

$$y_{max} = \frac{v_o^2 \sin^2\theta_o}{2g}. \tag{3.70}$$

Hitac kod kojeg vektor početne brzine zaklapa bilo koji oštar ugao θ_o prema horizontu naziva se *kosi hitac*. Ako vektor početne brzine ima horizontalni pravac, onda je to *horizontalni hitac*. U tom sluăju je $\theta_o = 0$, pa se iz izraza (3.64) za putanju horizontalnog hica dobija izraz

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_o^2}. \tag{3.71}$$

Kada vektor početne brzine ima vertikalni pravac, to je **vertikalni hitac**. U ovom slučaju ne postoji komponenta brzine u pravcu x-ose, te se jednačina kretanja dobija iz izraza (3.64), uz uslov da je $\theta_o = \pi/2$ ili $\theta_o = 3\pi/2$, što zavisi od toga da li je početna brzina usmerena naviše ili naniže

$$y = v_o t \mp \frac{1}{2} g t^2. \tag{3.72}$$

Znak (–) odnosi se na slučaj kada je $\theta_o = \pi/2$, a znak (+) na $\theta_o = 3\pi/2$.

Dobijeni izrazi važe za slučaj kada se kretanje vrši u vakuumu. Ako se telu saopšti mala početna brzina, uticaj trenja sa vazduhom se može zanemariti, pa se u takvim slučajevima hitac u vazduhu može opisati gornjim jednačinama. Medjutim, kod velikih početnih brzina, kao što je slučaj kod vatrenog oružja, sila trenja sa vazduhom se ne može zanemariti. Kada se i ona uzme u obzir, dobija se kriva prikazana isprekidanom linijom na slici 3.15, poznata pod nazivom *balistička kriva*.

4. Dinamika materijalne tačke

4.1 Predmet dinamike

U kinematici je razmatrano kretanje tela (materijalne tačke) na osnovu pojmova brzine i ubrzanja bez uzimanja u obzir uzroka koji dovode do tog kretanja. Deo mehanike koji proučava vezu izmedju kretanja tela i njegovih uzroka naziva se **dinamika**. Ovde će biti sprovedena razmatranja za brzine tela v koje su znatno manje od brzine svetlosti c ($c{=}3 \cdot 10^8 m/s$), čime se zanemaruju relativistički efekti.

4.2 Sila i masa. Impuls

Iz iskustva je poznato da telo ne može promeniti stanje kretanja ili mirovanja, niti se može deformisati, bez uticaja drugih tela. Fizička veličina koja služi kao mera uzajamnog dejstva (interakcije) tela, naziva se *sila*. Prema tome, definicija za silu glasi:
Sila je uzrok promeni stanja kretanja tela ili njegovoj deformaciji.

Uzajamno dejstvo tela može biti direkno. Na primer, jedno telo može vući ili gurati drugo dodirom. Takodje, telo može izazvati promenu kretanja drugog tela i bez dodira. Gravitaciono privlačenje, privlačenje ili odbijanje naelektrisanih tela, promena brzine tela u magnetnom polju drugog tela, itd. predstavljaju uzajamna dejstva tela posredstvom *fizičkog polja*. Fizičko polje je naročiti oblik kretanja materije koji je povezan sa svojstvima tela koja to polje izazivaju. I za takve interakcije dvaju ili više tela uzima se kao mera fizička veličina—sila.

Svaka sila deluje odredjenom jačinom i ima odredjen pravac i smer u kome deluje. To znači da je sila vektorska veličina. Tačka u kojoj je sila u neposrednoj vezi sa telom ili u kojoj se prenosi dejstvo sile naziva se *napadna tačka sile*. Treba naglasiti da se sila može prepoznati samo po njenom delovanju.

Sile u prirodi mogu biti gravitacione, elektromagnetne, sile jake interakcije i sile slabe interakcije.

Gravitacione sile su manifestacija dejstva gravitacionog polja, koje obrazuje telo date mase, na svaku drugu masu koja se unese u to polje. Po svojoj prirodi spadaju u privlačne sile.

Električne sile su manifestacija dejstva električnog polja na naelektrisanje koje se u polje unese. Ove sile mogu biti i odbojne i privlačne, zavisno od toga da li se radi o uzajamnom dejstvu dva naelektrisanja istog ili suprotnog znaka. Slično je i sa magnetnim silama izmedju magnetnih polova ili, pak, u magnetnom polju koje obrazuje struja. Stoga se i elektromagnetne pojave i elektromagnetni talasi proučavaju zajedno kao *elektromagnetne sile*.

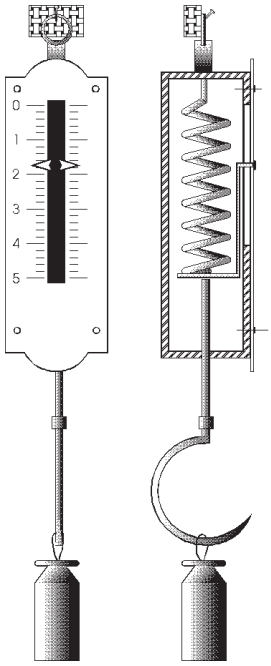
Sile jake interakcije su privlačne sile koje se javljaju izmedju čestica u jezgru na rastojanjima reda $10^{-15}m$. Njihova priroda ni do danas nije u potpunosti poznata, iako postoje brojni eksperimentalni podaci o strukturi jezgra.

Sile slabe interakcije, koliko je do danas poznato, imaju uticaj na β- i druge raspade elementarnih čestica, i na odnos protona i neutrona u jezgru. One su oko 10^{14} puta manjeg intenziteta od sila jake interakcije.

Pošto pri dejstvu sile može doći do deformacije ili ubrzanja tela, obe ove pojave se mogu koristiti za njeno merenje. U praksi je znatno jednostavnije izmeriti deformaciju nego ubrzanje tela. Instrumenti za merenje sile putem deformacije tela nazivaju se *dinamometri* (latinski dinamis—sila). Najvažniji deo dinamometra je opruga, čiji stepen deformacije zavisi od veličine izmerene sile (sl. 4.1).

Do pojma mase se može doći ako se posmatra dejstvo sile na različita tela.

Tako, na primer, pri pomeranju kugli različitog prečnika od istog materijala po glatkoj podlozi mora se upotrebiti veća sila za pomeranje kugle većeg prečnika. Isto tako, pri njihovom zaustavljanju potrebno je upotrebiti veću silu za kuglu većeg prečnika. Znači, različita tela pružaju različit otpor promeni stanja



Sl. 4.1: Dinamometar

svoga kretanja. Osobinu tela da se odupiru promeni stanja kretanja uočio je Galilej i nazvao je *inercija* (latinski inertia—lenjivost). Skalarna veličina koja predstavlja kvantitativnu meru za inerciju naziva se *masa*.

Za opisivanje kretanja tela odredjene mase koristi se veličina *impuls* (količina kretanja), koja je data izrazom

$$\vec{K} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4.1}$$

gde je m masa, a $\vec{v}$ brzina tela. Impuls je vektorska veličina istog pravca i smera kao brzina čiji je intenzitet m puta veći od intenziteta brzine.

4.3 Prvi Njutnov zakon

Pre Galileja se smatralo da se telo kreće samo dok na njega deluje neka sila. Galilej je otkrio da se uniformno kretanje tela po pravcu vrši bez uticaja sila, tj. da se kretanje vrši po inerciji. Mnogi njegovi savremenici nisu razumeli pojam inercije. Njutn (Newton) je prihvatio ovu osobinu tela kao aksiom i formulisao prvi osnovni zakon mehanike, u fizici poznat pod nazivom *Prvi Njutnov zakon mehanike* ili *Zakon inercije*. On glasi:
Svako telo teži da ostane u stanju mirovanja ili uniformnog pravolinijskog kretanja, sve dok dejstvom spoljašnjih sila nije prinudjeno da svoje stanje promeni.

Često se ovaj Zakon iskazuje i sledećim formulacijama:
Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili uniformnog pravolinijskog kretanja sve dok na njega ne deluju spoljašnje sile ili *telo prepušteno samo sebi ne menja svoju brzinu.*

Matematički izraz ovog Zakona je

$$m\vec{v} = const., \tag{4.2}$$

$$\vec{v} = const.$$

ili

$$\vec{a} = 0. \tag{4.3}$$

Uslovi (4.2) i (4.3) mogući su samo kad na telo ne deluju spoljašnje sile, odnosno kada je vektorski zbir sila koje deluju jednak nuli. Zato se Prvi Njutnov zakon matematički može izraziti i na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \tag{4.4}$$

Prvi Njutnov zakon ne važi u svakom referentnom sistemu. Tako će se kuglica, koja miruje na stolu u vozu koji se kreće uniformno pravolinijski, pomeriti čim voz uspori ili ubrza, iako na nju okolina pri tome ne deluje. Sistemi u kojima važi Prvi Njutnov zakon nazivaju se **inercijalni sistemi**. Prema tome, prihvatanjem ovog Zakona problem se svodi na opisivanje pojava u inercijalnim sistemima.

Svaki sistem koji miruje ili se kreće uniformno pravolinijski u odnosu na neki inercijalni sistem je takodje inercijalni sistem. Mirovanje i uniformno pravolinijsko kretanje su ravnopravni. Telo koje u jednom inercijalnom sistemu miruje, u drugom inercijalnom sistemu može da miruje ili da se uniformno pravolinijski kreće.

U praksi se najčešće koristi referentni sistem vezan za Zemlju (laboratorijski sistem). Ovaj sistem je samo približno inercijalan, jer Zemlja rotira oko Sunca i oko svoje ose, tj. u odnosu na Sunce ima odredjeno ubrzanje. Pošto je ovo ubrzanje malo, u većini slučajeva se može zanemariti i laboratorijski sistem smatrati inercijalnim. Jedan od inercijalnih sistema je i heliocentrični referentni sistem, vezan za Sunce. Ni ovaj sistem nije u potpunosti inercijalan, pošto se Sunce kreće oko centra galaksije. Medjutim, ubrzanje Sunca oko centra galaksije je oko 10^8 puta manje od ubrzanja Zemlje oko Sunca.

U realnim uslovima nemoguće je ostvariti kretanje tela na koje ne bi delovala druga tela. Medjutim, naglo odstranjivanje pojedinih jakih interakcija drugih tela u većoj meri pokazuje i potvrdjuje zakon inercije, mada su prisutne i mnoge druge interakcije. Na primer, ako se kolica sa kofom punom vode kreću po ravnom putu konstantnom brzinom, neće doći do prolivanja vode. Prolivanje vode pri naglom povećanju ili smanjenju brzine kolica ilustruje zakon inercije, iako ga ne objašnjava u potpunosti.

4.4 Drugi Njutnov zakon

Drugi Njutnov zakon je osnovni zakon dinamike translatornog kretanja koji govori o promeni kretanja tela pod dejstvom sile.

Ako se posmatra dejstvo sile različitog intenziteta na jedno isto telo, može se zapaziti da je ubrzanje uvek proporcionalno intenzitetu sile, tj.

$$a \sim F, \quad (m = const.). \tag{4.5}$$

Kada sile istog intenziteta deluju na tela različite mase, dolazi do različitog ubrzanja. Ukoliko je veća masa tela, utoliko je njegova inertnost veća, pa je pod dejstvom date sile ubrzanje manje, i obrnuto, tj.

$$a \sim \frac{1}{m}, \quad (F = const.). \tag{4.6}$$

Koristeći izraze (4.5) i (4.6) i znajući da su ubrzanje i sila vektorske veličine, dobija se

$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m}. \tag{4.7}$$

Pošto je u SI koeficijent proporcionalnosti $k=1$, to je:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

ili

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{4.8}$$

Pošto je $\vec{a}=d\vec{v}/dt$ izraz za silu se može napisati u obliku

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4.9}$$

Za male brzine masa tela je konstantna veličina, pa se izraz (4.9) može napisati u obliku

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}). \tag{4.10}$$

Izraz (4.10) predstavlja matematičku formulaciju Drugog Njutnovog zakona koji u slobodnom prevodu glasi:
Promena impulsa u vremenu proporcionalna je sili koja deluje na telo i vrši se u pravcu dejstva te sile.

Iz izraza (4.10) za Drugi Njutnov zakon može se doći do izraza za Prvi Njutnov zakon, ukoliko se uzme da je $\vec{F}=0$, odakle se dobija da je $d(m\vec{v})/dt=0$ ili $m\vec{v}=const.$

Jedinica za silu je *Njutn* (N): $1\,N$ je sila koja masi od $1\,kg$ saopštava ubrzanje od $1\,ms^{-2}$ u pravcu dejstva sile.

U praksi se retko dešava da na telo deluje samo jedna sila već više njih. Svaka od tih sila deluje nezavisno od ostalih i saopštava telu ubrzanje saglasno Drugom Njutnovom zakonu, kao da druge sile ne deluju. Ovo svojstvo u mehanici je poznato pod nazivom *princip nezavisnosti dejstva sile*, koji se može izraziti na sledeći način:

$$\vec{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i}{m}=\frac{\vec{F}}{m}, \tag{4.11}$$

gde je

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{4.12}$$

rezultanta svih sila koje deluju na telo. Iz izraza (4.10), (4.11) i (4.12) proizilazi da je

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{4.13}$$

Izraz (4.13) predstavlja osnovnu jednačinu translatornog kretanja koja važi i u klasičnoj i u relativističkoj fizici. U klasičnoj fizici masa je konstantna veličina ($m=const.$), pa je

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{4.14}$$

Rešavanjem jednačine (4.14) dobija se konačna jednačina kretanja. Naime, ako su poznate sve sile koje deluju na telo (materijalnu tačku) i početni uslovi, može se predvideti kako će se to telo kretati u budućnosti, kao i to kako se kretalo u prošlosti.

Princip o nezavisnom delovanju sila omogućava, takodje, da se sila i ubrzanje razlože na komponente i da se pojedine komponente ovih veličina posmatraju nezavisno od ostalih, što pojednostavljuje rešavanje problema. Na primer, na slici 4.2 sila $\vec{F}$ koja deluje na telo razložena je na dve komponente: tangencijalnu $\vec{F}_\tau$, čiji je pravac duž tangente na putanju, i normalnu $\vec{F}_n$, čiji je pravac prema centru krivine. Znajući da je $a_\tau=dv/dt$ i $a_n=v^2/r$, a takodje $v=r\omega$, dobija se

$$F_\tau=ma_\tau=m\frac{dv}{dt} \tag{4.15}$$

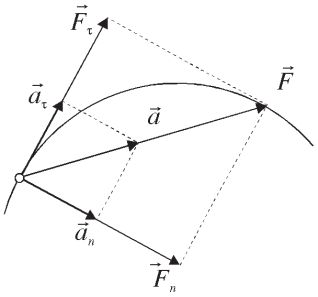
i

$$F_n=ma_n=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2 r. \tag{4.16}$$

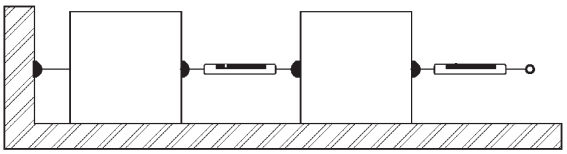
Ponekad je pri posmatranju neke fizičke pojave od interesa da se posmatra kretanje tela samo duž jedne od osa koordinatnog sistema i to pod uticajem komponente sile u pravcu te ose. Tada se analiza kretanja u pravcu te ose može izvesti nezavisno od kretanja pod uticajem drugih komponenata iste sile.

4.5 Treći Njutnov zakon

Do sada je bilo govora samo o sili kojom jedno telo deluje na drugo, uz zanemarivanje sile kojom drugo telo istovremeno deluje na prvo. Sada će se razmotriti obe ove sile, odnosno realan slučaj uzajamnog dejstva dvaju tela.



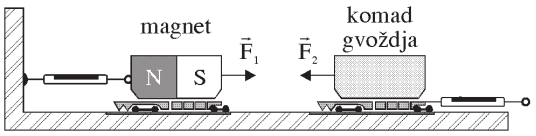
Sl. 4.2: Razlaganje sile $\vec{F}$ na dve komponente



Sl. 4.3: Tela povezana dinamometrima

Neka se dva dinamometrom povezana tela nalaze na glatkoj podlozi (sl. 4.3). Jedno od ova dva tela je pričvrćeno za nepomični oslonac, a za drugo je prčvršćen drugi dinamometar. Ako se povlači slobodni dinamometar sa namerom da se telo odvoji od zida, primetiće se da je izvlačenje i jednog i drugog dinamometra podjednako, tj. dinamometar postavljen izmedju tela pokazivaće istu silu kao dinamometar koji se povlači. Iz ovog primera se zaključuje da dinamometar kojim su povezana tela pokazuje silu odupiranja drugog tela delovanju prvog tela. Javlja se, dakle, par sila istog intenziteta a suprotnog smera.

Pojava para sila istog intenziteta, a suprotnog smera može se zapaziti i u slučaju kada sile deluju na izvesnom rastojanju. Neka se, na primer, na kolicima nalaze magnet i komad gvoždja (sl. 4.4). Kolica sa magnetom su preko dinamometra vezana za nepomični oslonac. Za kolica na kojima se nalazi komad gvoždja takodje je vezan dinamometar. Intenziteti sila kojima se privlače magnet i komad gvoždja zavise od njihovog rastojanja. Medjutim, kada su kolica u miru, dinamometri pokazuju istu silu. Znači, i u ovom slučaju se javlja par sila istog intenziteta, a suprotnog smera. Dejstvo jedne sile naziva se *akcija*, a druge *reakcija*. Obe sile su ravnopravne, iako se često u praksi za akciju uzima sila koja potiče od neposredno posmatranog tela.



Sl. 4.4: Kolica sa magnetom i komadom gvoždja na izavesnom rastojanju

Pojava medjusobnog delovanja dva tela iskazuje se Trećim Njutnovim zakonom, koji u slobodnom prevodu glasi:
Akcija je uvek suprotna i jednaka reakciji; uzajamna dejstava dvaju tela su uvek medjusobno jednaka i suprotno usmerena.

Matematički se Treći Njutnov zakon može predstaviti u obliku:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{4.17}$$

Prema Drugom Njutnovom zakonu je

$$F_1 = m_1\vec{a}_1; \quad \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2. \tag{4.18}$$

Iz izraza (4.17) i (4.18) sledi

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$$

ili

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{a}_2, \tag{4.19}$$

tj. ubrzanja dva tela koja medjusobno deluju su proporcionalna njihovim masama i suprotnog su smera.

4.6 Gravitacija

Interakcija izmedju tela koja je prouzrokovana postojanjem njihovih masa naziva se *gravitacija*. Kvantitativna mera za gravitaciju je sila gravitacije, koja je privlačnog karaktera. Usled gravitacije planete se kreću po eliptičnim putanjama oko Sunca. Gravitaciono dejstvo Zemlje utiče na oblik kretanja tela (slobodno padanje, hitac, itd.). Najzad, i težina tela je posledica postojanja Zemljine gravitacije.

4.6.1 Njutnov zakon gravitacije

Sva tela u prirodi se medjusobno privlače. Zakon po kome se vrši to privlačenje ustanovio je Njutn 1686. godine. On glasi: *Sila kojom se dve materijalne tačke privlače proporcionalna je proizvodu njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja*, tj.

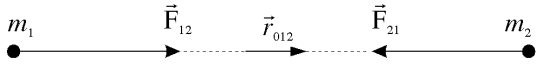
$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{4.20}$$

gde je γ koeficijent proporcionalnosti i naziva se gravitaciona konstanta.

Izraz (4.20) se može napisati i u vektorskom obliku. Naime, sila $\vec{F}_{12}$ kojom materijalna tačka mase m_2 deluje na materijalnu tačku mase m_1 (sl. 4.5) može se izraziti na sledeći način:

$$\vec{F}_{12} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_{o12}, \tag{4.21}$$

gde je $\vec{r}_{o12}$ jedinični vektor koji ima smer od m_1 ka m_2.



Sl. 4.5: Gravitaciona sila izmedju dve materijalne tačke

Po trećem Njutnovom zakonu, sila $\vec{F}_{21}$, kojom materijalna tačka mase m_1 deluje na materijalnu tačku mase m_2, istog je intenziteta, ali suprotnog smera od sile $\vec{F}_{12}$, tj.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_{o12}. \tag{4.22}$$

4.6.2 Gravitaciono polje

Karakteristično za gravitacione sile je da one, slično električnim i magnetnim, deluju na rastojanjima. To znači da deluju kroz prostor bez neposrednog dodira medju telima. Za ovakve sile pogodno je da se uvede pojam polja sila. *Pod poljem sila se podrazumeva deo prostora u kome se oseća dejstvo tih sila.*

Ako se posmatra gravitaciona sila kojom jedno telo deluje na drugo, kaže se da prvo telo oko sebe obrazuje gravitaciono polje i da to polje deluje silom na drugo telo. Medjutim, i drugo telo oko sebe obrazuje gravitaciono polje koje deluje na prvo telo.

Gravitaciono polje postoji oko svakog tela, bez obzira da li ono miruje ili se kreće. Postojanje gravitacionog polja u nekoj tački prostora može da se utvrdi samo pomoću drugog tela, njegovim postavljanjem u posmatranoj tački i merenjem dejstva gravitacionog polja na njega. Ovo dejstvo se manifestuje gravitacionom silom, čiji intenzitet je srazmeran jačini gravitacionog polja u posmatranoj tački.

Kvantitativna veličina za opisivanje gravitacionog polja je jačina gravitacionog polja $\vec{G}$, koja je data količnikom sile i mase na koju ta sila deluje

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{4.23}$$

Masa m naziva se probna masa i znatno je manja od mase tela čije se polje posmatra. Ovaj uslov u mnogome pojednostavljuje problem, jer se polje probne mase može zanemariti.

Jedinica gravitacionog polja je Nkg^{-1}.

Kao specifičan primer posmatraće se gravitaciono polje Zemlje. U blizini Zemljine površine može se smatrati da gravitaciona sila $\vec{F}$ kojom Zemlja deluje na probnu masu m ima isti intenzitet i pravac u svim tačkama. Tada i jačina gravitacionog polja ima isti intenzitet i pravac u svim tačkama, pa se kaže da je polje uniformno.

Izraz za jačinu gravitacionog polja Zemlje na nekom rastojanju r od njegovog centra može se dobiti ako se u izraz (4.23) uvrsti izraz (4.20) za gravitacionu silu. Tada je

$$G = \gamma \frac{M}{r^2}, \tag{4.24}$$

gde je M masa Zemlje. Iz izraza (4.24) vidi se da jačina gravitacionog polja Zemlje opada sa kvadratom rastojanja od njenog centra.

Gravitaciona sila po drugom Njutnovom zakonu je jednaka $\vec{F} = m\vec{g}$, pa iz izraza (4.23) sledi da je jačina gravitacionog polja

$$\vec{G} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}. \tag{4.25}$$

Dakle, jačina gravitacionog polja jednaka je po intenzitetu i pravcu ubrzanju zemljine teže. Tako, na primer, u tački gde je $g = 9,81\, ms^{-2}$ jačina gravitacionog polja je $G = 9,81\, Nkg^{-1}$, a njegov smer prema centru Zemlje.

Gravitaciono polje se prikazuje preko *linija sila gravitacionog polja*. One predstavljaju pravac dejstva jačine polja, tj. pravce po kojima se kreće probna masa m u tom polju. Smer tih linija, odnosno smer jačine polja, uvek je prema centru one mase čije se gravitaciono polje posmatra. U slučaju Zemljinog gravitacionog polja to je smer kretanja tela kada slobodno pada.

4.7 Težina tela

Sva tela koja padaju sa relativno male visine od površine Zemlje kreću se, ako se zanemari otpor vazduha, konstantnim ubrzanjem g. Ovo ubrzanje je poznato pod nazivom *ubrzanje teže* ili *ubrzanje gravitacije*. Sila koja izaziva ovo ubrzanje naziva se *sila teže, težina tela* ili *sila gravitacije*. Ako se u izrazu za silu $\vec{F} = m\vec{a}$ umesto ubrzanja $\vec{a}$ uzme ubrzanje $\vec{g}$, sila teže $\vec{Q}$ se može izraziti na sledeći način:

$$\vec{Q} = m\vec{g}. \tag{4.26}$$

Vektori $\vec{Q}$ i $\vec{g}$ imaju isti pravac i smer i orijentisani su prema centru Zemlje. Iz izraza (4.26) se zapaža da su masa i težina dve različite veličine.

Vrednost ubrzanja teže zavisi od geografske širine. Pošto je ubrzanje teže na jednoj geografskoj širini konstantno, iz (4.26) se zaključuje da je sila teže koja deluje na telo srazmerna njegovoj masi.

Ako se dva tela različitih masa nalaze na istoj geografskoj širini, sile teže tih tela se odnose kao njihove mase. Kada se jedno isto telo nalazi na mestima različite geografske širine, njegove težine će biti različite i medjusobno će se odnositi kao ubrzanja teže na tim mestima.

Intenzitet sile teže opada sa udaljenjem tela od centra Zemlje. Medjutim, promena težine tela pri promeni njegove visine ili geografske širine se ne može zapaziti merenjem na terazijama, jer koliko se promeni težina tela zbog ubrzanja teže, toliko se promeni i težina tegova, pa brojna vrednost težine tela ostaje ista. Naime, težina nekog tela Q_1 pomoću terazija se odredjuje tako što se uporedi sa poznatom težinom Q_2. Kako je $Q_1 = m_1 g$ i $Q_2 = m_2 g$, gde je m_1 masa tela čija se težina meri, a m_2 masa poznatog tela (tega), pri uspostavljanju ravnoteže važiće

$$m_1 g = m_2 g, \tag{4.27}$$

ili

$$m_1 = m_2. \tag{4.28}$$

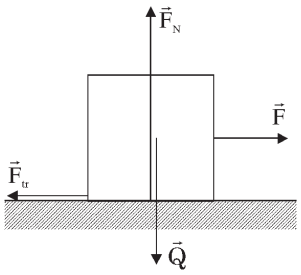
Iz jednakosti izraza (4.27) i (4.28) se zaključuje da se pomoću terazija, pored nepoznate težine tela, meri i njegova masa. Ovakav način merenja mase naziva se *statičko merenje mase* i zbog svoje jednostavnosti se često primenjuje u praksi.

4.8 Sila trenja

Pri dosadašnjem razmatranju sila nije se vodilo računa o njihovom poreklu. Medjutim, na telo mogu delovati različite sile: trenje, elastičnost, gravitacija i sl. Ovde će se razmotriti sile trenja.

Iz eksperimenata je poznato da svako telo koje se kreće po horizontalnoj podlozi, bez uticaja spoljašnjih sila smanjuje svoju brzinu u toku vremena dok se na kraju ne zaustavi. Ova pojava se može objasniti postojanjem neke sile koja se suprostavlja kretanju. Ta sila se naziva *sila trenja* i deluje u pravcu koji je paralelan dodirnim površinama, sa smerom suprotnim smeru sile koja vrši pomeranje tela.

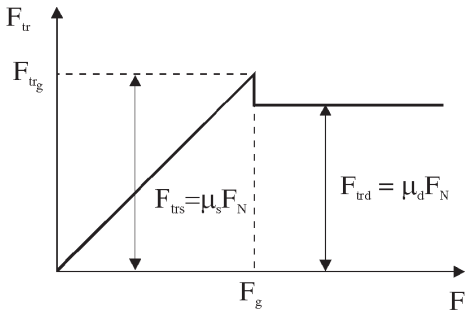
Trenje koje se javlja medju čvstim površinama naziva se *spoljašnje* ili *suho trenje*, a ono medju delovima fluida koji se kreću *unutrašnje trenje* ili *viskoznost*. Spoljašnje trenje je uslovljeno hrapavošću dodirnih površina, a u slučaju da su one veoma glatke, privlačnim medjumolekularnim silama.



Sl. 4.6: Uz objašnjenje sile trenja

Neka se na ravnoj podlozi nalazi telo na koje deluje sila $\vec{F}$ (vučna sila) (sl. 4.6). Ako je ova sila malog intenziteta, telo će mirovati, što znači da je vučna sila uravnotežena sa silom trenja. Povećanjem vučne sile povećava se i sila trenja. Telo će početi da se kreće tek onda kada je vučna sila $\vec{F}$ veća od sile trenja $\vec{F}_{tr}$. Najveća sila trenja, usled koje telo još miruje, naziva se *sila statičkog trenja*.

Eksperimenti pokazuju da je sila potrebna za održavanje kretanja manja od sile potrebne za pokretanje tela. Sila trenja koja se javlja pri kretanju tela naziva se *sila dinamičkog trenja*. Zavisnost sile trenja od vučne sile prikazana je na slici 4.7.



Sl. 4.7: Zavisnost sile trenja F_{tr} od vučne sile F

Eksperimentalno je pokazano da se sila statičkog trenja F_{trs} može izraziti kao

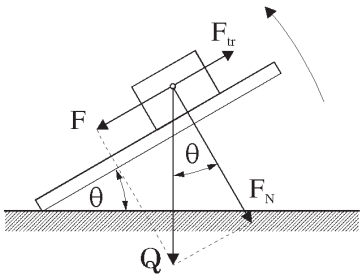
$$F_{trs} = \mu_s F_N, \tag{4.29}$$

a sila dinamičkog trenja F_{trd}

$$F_{trd} = \mu_d F_N. \tag{4.30}$$

U izrazima (4.29) i (4.30) μ_s i μ_d predstavljaju koeficijente statičkog i dinamičkog trenja, respektivno. Statički koeficijent trenja je veći od dinamičkog. Oba koeficijenta zavise od vrste materijala, čistoće i hrapavosti dodirnih površina.

Koeficijent trenja se može odrediti pomoću strme ravni (sl. 4.8).



Sl. 4.8: Odredjivanje koeficijenta trenja

Ako se telo nalazi na strmoj ravni čiji se nagib može menjati, težina tela se može razložiti na komponentu F duž strme ravni i normalnu komponentu F_N. Ugao se povećava sve dok telo ne počne da klizi. U tom trenutku (granični ugao θ_{max}), komponenta težine F jednaka je sili statičkog trenja, tj. $F = F_{trs}$).

Sa slike 4.8 se vidi da je

$$F = Qsin\theta_{max} = F_{trs}; \quad F_N = Qcos\theta_{max}. \tag{4.31}$$

Kombinovanjem izraza (4.29) i (4.31), za koeficijent statičkog trenja se dobija

$$\mu_s = tan\theta_{max}. \tag{4.32}$$

Prema tome, koeficijent statičkog trenja jednak je tangensu ugla θ_{max}, pri kome počinje klizanje tela po strmoj ravni.

Na sličan način može se odrediti koeficijent dinamičkog trenja. Naime, kada telo počne da klizi niz strmu ravan, za održavanje njegovog uniformnog kretanja potreban je manji ugao strme ravni θ ($\theta < \theta_{max}$), pa se koeficijent dinamičkog trenja može izraziti kao

$$\mu_d = tan\theta. \tag{4.33}$$

Sila trenja se može smanjiti ako se izmedju tela stavi neko mazivo (ulje ili mast) koje formira tanak sloj i popunjava neravnine na površini, tako da nema direktnog kontakta izmedju tela. Na taj način se spoljašnje zamenjuje unutrašnjim trenjem, koje je nekoliko puta manje.

Pored pomenutih vrsta trenja, postoji i trenje kotrljanja. Takav slučaj nastaje, na primer, pri kotrljanju valjka po nekoj podlozi. Eksperimentalno je pokazano da je u ovom slučaju sila trenja F_{trk} srazmerna težini valjka Q (sili koja je normalna na podlogu), a obrnuto srazmerna poluprečniku valjka

$$F_{trk} = k\frac{Q}{r}, \tag{4.34}$$

gde je k koeficijent trenja kotrljanja koji ima dimenzije dužine.

4.9 Impuls sile

Impuls sile $d\vec{p}$ jednak je proizvodu sile $\vec{F}$ koja deluje na telo i vremena njenog delovanja dt:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \tag{4.35}$$

Dakle, impuls sile je vektorska veličina istog pravca i smera kao sila, ali različitog intenziteta, što zavisi od vremena delovanja sile.

Za konačni vremenski interval od t_1 do t_2 impuls sile se može izraziti kao

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \tag{4.36}$$

U slučaju da je sila konstantna veličina, gornji izraz dobija oblik

$$\vec{p} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t, \tag{4.37}$$

gde je $\Delta t = t_2 - t_1$.

Pošto se najčešće sila menja u toku vremena, definiše se njena srednja vrednost $<\vec{F}>$:

$$<\vec{F}> = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \frac{\vec{p}}{\Delta t}. \tag{4.38}$$

Iz ovog izraza se vidi da je impuls sile jednak proizvodu srednje sile i vremenskog intervala za koji ona deluje.

Po drugom Njutnovom zakonu je $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$, pa izraz (4.38) dobija oblik

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1, \tag{4.39}$$

gde je uzeto da je u trenutku t_1 brzina tela $\vec{v}_1$, a u trenutku t_2 brzina $\vec{v}_2$. Iz izraza (4.39) se vidi da je impuls sile jednak promeni impulsa.

4.10 Zakon održanja impulsa sistema tela

Pod sistemom tela podrazumeva se skup dva ili više tela. U zavisnosti od sila koje deluju na njih, sistemi mogu biti zatvoreni (izolovani) i otvoreni. Kod zatvorenih sistema se javljaju samo unutrašnje sile, tj. sile medjusobnog delovanja tela koje čine taj sistem. U prirodi ne postoji idealni zatvoreni sistem, ali su u nekim slučajevima spoljašnje sile (impulsi sila) znatno manje od unutrašnjih, pa se mogu zanemariti. Stoga se sa odredjenim stepenom tačnosti takav sistem smatra zatvorenim. Kod otvorenog sistema, pored unutrašnjih, prisutne su i spoljašnje sile na tela koja obrazuju taj sistem.

Neka dva tela (ili materijalne tačke) čine zatvoreni sistem. Masa jednog tela je m_1 i brzina $\vec{v}_1$, a drugo ima masu m_2 i brzinu $\vec{v}_2$. Ova dva tela medjusobno deluju silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera. Prema Trećem Njutnovom zakonu je

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{4.40}$$

Prema Drugom Njutnovom zakonu, ukupna promena impulsa ovog sistema je

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{4.41}$$

Iz izraza (4.40) i (4.41) sledi

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0, \tag{4.42}$$

ili

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \sum_{i=1}^{2} m_i\vec{v}_i = const.. \tag{4.43}$$

Za zatvoreni sistem od n tela važi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = const.. \tag{4.44}$$

Izraz (4.43) ili (4.44) predstavlja matematičku interpretaciju Zakona održanja impulsa zatvorenog sistema. On se može iskazati na sledeći način:
Vektorski zbir impulsa pojedinih tela koji čine zatvoreni sistem u toku kretanja ostaje konstantan.

Neka na posmatrana tela, masa m_1 i m_2, brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, pored unutrašnjih $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ deluju i spoljašnje sile. Na telo mase m_1 deluje spoljašnja sila $\vec{F}_a$, a na telo mase m_2 sila $\vec{F}_b$. Tada je ukupna promena impulsa

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_a + \vec{F}_b, \tag{4.45}$$

ili

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n=2} \vec{F}_{ab}, \tag{4.46}$$

gde je $\vec{F}_{ab}$ rezultanta spoljašnjih sila koje deluju na opisani sistem od dva tela.

Ako se radi o otvorenom sistemu od n tela, onda gornji izraz dobija oblik:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{4.47}$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \int \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i dt + c, \tag{4.48}$$

gde je $\sum \vec{F}_i$ rezultanta spoljašnjih sila koje deluju na sistem od n tela. Iz izraza (4.48), pod uslovom da je

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R = const., \tag{4.49}$$

dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{F}_R t + c, \tag{4.50}$$

gde je $\vec{F}_R$ rezultanta svih spoljašnjih sila.

Integraciona konstanta se može odrediti iz uslova da je u momentu posmatranja $t=0$ ukupni impuls sistema bio

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{oi}. \tag{4.51}$$

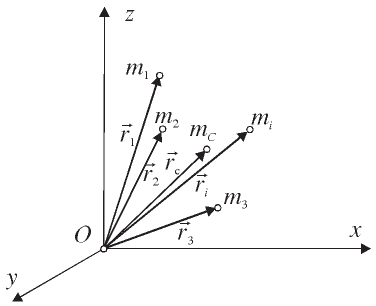
Zamenom gornjeg izraza u izraz (4.51) dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{oi} = \vec{F}_R t. \tag{4.52}$$

Iz izraza (4.52) proizilazi da je promena impulsa otvorenog sistema jednaka impulsu rezultantne sile $\vec{p}=\vec{F}_R t$.

4.11 Centar mase

Pri proučavanju kretanja nekog sistema moglo bi se pojedinačno posmatrati kretanje svakog tela (materijalne tačke) koji ga sačinjavaju. To bi bio veoma komplikovan postupak, naročito kada se radi o sistemima sačinjenim od velikog broja tela. Ovo proučavanje se olakšava uvodjenjem pojma *centra mase* (centra inercije) sistema. Centar mase predstavlja zamišljenu tačku u kojoj je skoncentrisana celokupna masa sistema. Na taj način problem kretanja velikog broja tela svodi se na problem kretanja jedne materijalne tačke.



Sl. 4.9: Uz objašnjenje centra mase

Za sistem koji se sastoji od n tela, masa m_1, m_2, m_3,...,m_n (sl. 4.9), može se definisati centar mase, čiji vektor položaja je

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

ili

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i. \tag{4.53}$$

Koordinate centra mase su

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \end{aligned} \tag{4.54}$$

brzina mu je

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i, \tag{4.55}$$

a impuls

$$\vec{K}_c = m\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i. \tag{4.56}$$

Prema Drugom Njutnovom zakonu, kretanje centra mase može se izraziti u obliku

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{si} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ui}, \tag{4.57}$$

gde je $\vec{a}_c$ ubrzanje centra mase, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{si}$ zbir spoljašnjih sila i $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ui}$ zbir unutrašnjih sila koje deluju na sistem. Iz Trećeg Njutnovog zakona proizilazi da je zbir unutrašnjih sila jednak nuli, pa gornji izraz dobija oblik

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{si} = \vec{F}_s. \tag{4.58}$$

Iz izraza (4.58) proizilazi da se centar mase sistema tela kreće kao materijalna tačka u kojoj je skoncentrisana celokupna masa tela. Ovo kretanje se vrši pod uticajem sile koja je jednaka geometrijskom zbiru (rezultanti) svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem. Gornji izraz predstavlja matematičku interpretaciju *zakona kretanja centra mase*. Kada nema dejstva spoljašnjih sila ($\vec{F}_s = 0$), tada je $m\vec{a}_c = 0$ ili

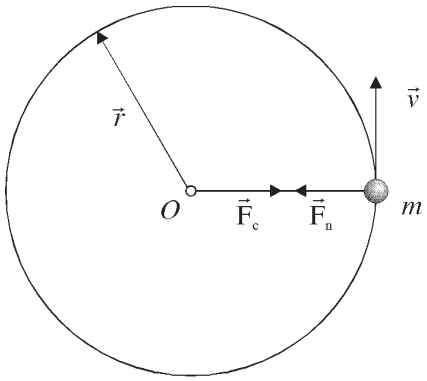
$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \quad \vec{v}_c = const.. \tag{4.59}$$

Dakle, kada na sistem ne deluju spoljašnje sile (zatvoreni sistem), centar mase se kreće uniformno pravolinijski ili ostaje u miru. Tako, na primer, pri eksploziji granate koja je pala na Zemlju njen centar mase ostaje na tom mestu, iako se granata raspala na veliki broj komada koji se kreću različitim brzinama.

4.12 Centripetalna sila

Neka se telo mase m kreće konstantnom ugaonom brzinom po kružnoj putanji poluprečnika r (sl. 4.10). U ovom slučaju, kao što je poznato iz kinematike, deluje samo normalno (centripetalno) ubrzanje a_n, koje je usmereno ka centru kružne putanje. Iz Drugog Njutnovog zakona proizilazi da na telo deluje sila čiji je pravac i smer, takodje, ka centru kružne putanje. Ta sila se može izraziti na sledeći način:

$$F_n = ma_n = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}. \tag{4.60}$$



Sl. 4.10: Uz objašnjenje centripetalne sile

Kada se telo kreće po kružnoj putanji (sl. 4.10), može se smatrati da postoji sistem od dva tela medju kojima se javlja dejstvo sile. Ovaj sistem čine telo koje kruži i centar kružne putanje O. Sila koja deluje na centar O naziva se *centripetalna* ili *radijalna sila* $\vec{F}_n$. Prema Trećem Njutnovom zakonu mora postojati i sila kojom centar mase deluje na telo. Ta sila se naziva *centrifugalna sila* $\vec{F}_c$. Ona je istog intenziteta i pravca kao centripetalna sila, ali je suprotnog smera.

Ako telo rotira sa promenljivom ugaonom brzinom, onda se pored centripetalne sile, koja menja smer brzine, pojavljuje i tangencijalna sila, koja menja iznos brzine, pa je ukupna sila jednaka vektorskom zbiru ove dve sile.

Uzrok centripetalne sili može biti različit, zavisno od toga šta uslovljava kružno kretanje. Na primer, kod kretanja planeta oko Sunca, centripetalna sila dolazi od privlačenja masa (gravitacije), pri kretanju elektrona oko jezgra od privlačne elektrostatičke sile, kada se vrti kamen na užetu, od rezultante sile teže i sile zategnutosti užeta, itd. Pošto pravac centripetalne sile sa pravcem kretanja tela u datoj tački putanje zaklapa ugao od 90°, rad koji vrši ova sila jednak je nuli.

Ako intenzitet centripetalne sile nije dovoljan da se telo sa odredjenom brzinom v održi na putanji poluprečnika r, ono će preći na putanju većeg poluprečnika. Ukoliko se dejstvo ove sile prekine, telo nastavlja da se kreće pravolinijski u pravcu tangente na kružnicu po kojoj je rotiralo, brzinom koju je imalo u tom trenutku.

5. Rad i energija

5.1 Rad

U svakodnevnom životu reč "rad" se primenjuje za aktivnosti koje zahtevaju bilo kakav oblik fizičkog ili umnog naprezanja. U fizici je upotreba ovog termina ograničena. Naime, poznato je da tela medjusobno mogu delovati različitim silama (sile trenja, gravitacije, elastične sile, elektromagnetne sile, itd.), što dovodi do njihovog pomeranja. Za karakterisanje ovih pojava koristi se veličina koja je utoliko veća ukoliko je veća komponenta sile duž pravca pomeranja i ukoliko se na veću daljinu premešta njena napadna tačka. Ta veličina u fizici je poznata pod nazivom *rad*.

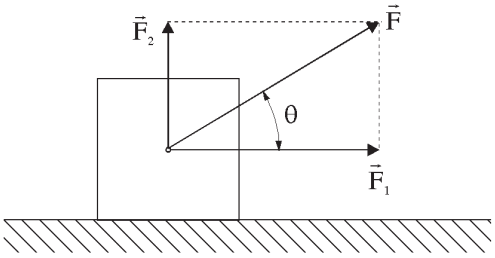
Najjednostavniji slučaj vršenja rada je kada na telo deluje konstantna sila $\vec{F}$ čiji se pravac poklapa sa pravcem pravolinijskog kretanja tela $\vec{s}$. U tom slučaju mehanički rad sile dat je izrazom

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \tag{5.1}$$

Ako je sila $\vec{F}$ konstantna i deluje pod uglom θ u odnosu na pravolinijsko pomeranje tela (sl. 5.1), izvršeni rad jednak je proizvodu komponente sile paralelne pomeranju i samog pomeranja, tj.

$$A = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} = F\, s \cos\theta. \tag{5.2}$$

Ako je $\theta < 90°$, tj. ako sila i put zaklapaju oštar ugao, rad je pozitivan ($A > 0$), za $\theta > 90°$ je negativan ($A < 0$), a ako je $\theta = 90°$, ne vrši se rad ($A = 0$).



Sl. 5.1: Uz objašnjenje rada konstantne sile čiji pravac zaklapa ugao θ sa pravcem pomeranja

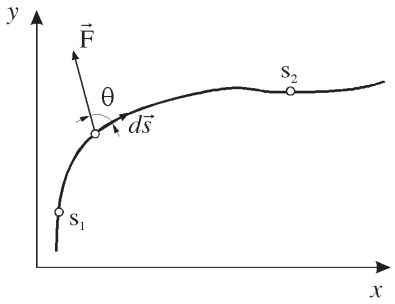
Izrazi (9.4) i (9.5) predstavljaju specijalne slučajeve vršenja rada. Najopštiji slučaj je kada se sila koja deluje na telo menja i po pravcu i po intenzitetu, a kretanje vrši po krivolinijskoj putanji. Da bi se odredio rad ovakve sile na putu od s_1 do s_2 (sl. 5.2), potrebno je put izdeliti na elemente ds, na kojima se može smatrati da je sila konstantna, a pomeranje pravolinijsko. Tada elementarni rad iznosi

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F\, ds \cos\theta, \tag{5.3}$$

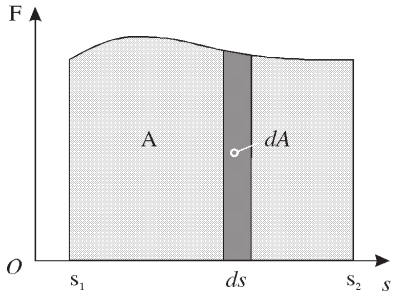
a ukupan rad na putu od s_1 do s_2 odredjen je integralom

$$\int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F ds \cos\theta. \tag{5.4}$$

Za izračunavanje ovog integrala neophodno je poznavati zavisnost F od s duž trajektorije $s_1 s_2$. Ako je ta zavisnost oblika datog na slici 5.3 traženi rad A odredjen je zasenčenom površinom na grafiku.



Sl. 5.2: Uz objašnjenje rada promenljive sile



Sl. 5.3: Grafički prikaz rada promenljive sile

Ako se telo kreće pravolinijski i ako je $F = const.$ i $\theta = const.$, onda je

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds \cos\theta = F(s_2 - s_1)\cos\theta$$

ili

$$A = F\, s \cos\theta, \tag{5.5}$$

gde je $s_2 - s_1 = s$ put koji telo predje pod dejstvom promenljive sile. Jedinica za rad je *Džul* (J).

5.2 Snaga

U praksi je često potrebno, pored poznavanja rada koji izvrši neka sila, poznavati i vreme za koje je taj rad izvršen. Naime, u tehničkom pogledu sila je utoliko korisnija ukoliko za kraće vreme izvrši neki rad. Za karakterisanje brzine vršenja rada koristi se fizička veličina koja se naziva *snaga* ili *efekat*. Snaga je jednaka odnosu rada ΔA i vremenskog intervala za koji se taj rad izvrši Δt:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{5.6}$$

Ovaj izraz važi za slučaj kada je odnos $\Delta A/\Delta t$ stalan, odnosno kada je snaga konstantna veličina. Kada se snaga menja sa vremenom, izraz daje srednju vrednost snage u intervalu Δt.

Za slučaj promenljive snage (za jednake vremenske intervale vrši se različiti rad) uvodi se pojam trenutne snage

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \tag{5.7}$$

Snaga se može izraziti preko sile i brzine na sledeći način:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{F\Delta s}{\Delta t} = Fv, \tag{5.8}$$

Jedinica za snagu je *Vat* (W). Jedan W predstavlja rad od $1\,J$ u $1\,s$ ($W = J/s$).

Iz izraza (5.6) proizilazi da se jedinica za rad može izraziti preko jedinice za snagu kao $J = W{\cdot}s$. Zato se u tehnici J često naziva vatsekund (Ws). U upotrebi je veća jedinica za rad—kilovatčas (kWh), kojom se meri potrošnja električne energije.

5.3 Energija

Svi oblici kretanja materije pri odredjenim uslovima mogu prelaziti jedan u drugi u strogo odredjenim kvantitativnim odnosima. Ova pojava je omogućila merenje različitih oblika kretanja istom merom, što je uslovilo uvodjenje pojma energije. *Energija je opšta mera za različite procese i oblike medjusobnog dejstva.*

Promena energije tela ili sistema tela ΔE proporcionalna je radu A koji vrše spoljašnje sile kada deluju na telo (sistem), tj.

$$\Delta E = kA, \tag{5.9}$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti. Ako se uzme da je $k = 1$, onda je

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A. \tag{5.10}$$

Ova jednakost se naziva *teorema o radu i energiji.*

Kada je rad spoljašnjih sila pozitivan (sila vrši rad), energija raste, i obrnuto, kada je ovaj rad negativan (telo vrši rad), energija sistema se smanjuje. Prema tome, telo može da vrši rad samo na račun promene svoje energije. Ako je rad koji vrši neki sistem tela jednak nuli, onda je to zatvoren sistem.

Na osnovu prethodno iznetog može se zaključiti da je energija veličina koja karakteriše stanje nekoga tela, a rad veličina koja karakteriše promenu tog stanja. Telo (sistem) poseduje energiju, a rad predstavlja proces prenošenja energije sa jednog tela na drugo, ili proces pretvaranja jednog oblika energije u drugi. Na primer, kada kuglica koja se kreće odredjenom brzinom udari u nepokretnu kuglicu, predaje joj deo svoje energije, usled čega i ona počinje da se kreće.

Postoji više oblika energije, kao što su mehanička, toplotna, električna, hemijska, nuklearna, itd. Ovde će biti reči samo o mehaničkoj energiji, koja se deli na kinetičku i potencijalnu energiju.

5.3.1 Kinetička energija

Kinetička energija tela (materijalne tačke) predstavlja meru njegovog mehaničkog kretanja i odredjuje rad koji je neophodno izvršiti da bi došlo do kretanja tela.

Neka je u momentu posmatranja telo imalo brzinu v_1. Delovanjem sile F njegova brzina se povećala i iznosi v_2, a energija se povećala za vrednost utrošenog rada. Rad sile F na putu od s_1, gde je brzina v_1, do s_2, gde je brzina v_2, iznosi

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds. \tag{5.11}$$

Pošto je $F = m\, dv/dt$, to je

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{dv}{dt}ds = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{5.12}$$

Ako se uporedi ovaj izraz sa teoremom (5.10), može se zapaziti da $mv_1^2/2$ predstavlja kinetičku energiju tela kada se kreće brzinom v_1, a $mv_2^2/2$ njegovu kinetičku energiju kada se kreće brzinom v_2. Stoga se, u opštem slučaju, kinetička energija može matematički izraziti kao

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{5.13}$$

Ako se radi o sistemu tela (materijalnih tačaka), čije su mase m_1, m_2, m_3,...,m_n, a brzine v_1, v_2, v_3,..., v_n, ukupna kinetička energija sistema je

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{5.14}$$

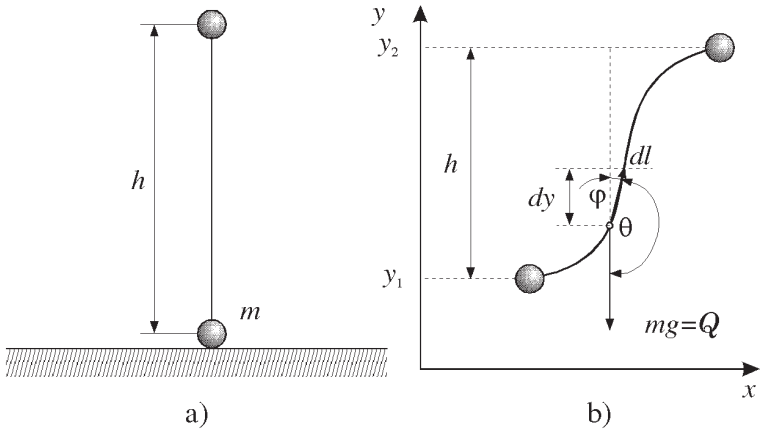
Iz izraza (5.13) se vidi da kinetička energija zavisi samo od mase i brzine tela, dakle, ona je funkcija stanja njegovog kretanja.

Pri izvodjenju izraza (5.13) pretpostavljeno je da se kretanje razmatra u inercijalnom sistemu referencije, jer se u protivnom ne bi mogao koristiti Njutnov zakon. U različitim inercijalnim sistemima referencije, koji se kreću jedan u odnosu na drugi, brzina tela, a time i njegova kinetička energija, biće različita. Prema tome, kinetička energija zavisi od izbora sistema referencije.

5.3.2 Potencijalna energija

Telo poseduje energiju ne samo pri kretanju, već i kada se nalazi u odredjenom položaju u prostoru. Takva energija naziva se *potencijalna energija*.

Uobičajen primer potencijalne energije jeste gravitaciona potencijalna energija. Telo odredjene mase podignuto na neku visinu ima gravitacionu potencijalnu energiju zahvaljujući svom položaju, jer ima mogućnost da izvrši rad prilikom pada sa te visine. Primer za ovo je pobijanje štapa u zemlju pod udarom čekića. Podizanje tela mase m vertikalno naviše moguće je samo ako se na njega deluje silom koja je barem jednaka sili teže mg (ovo važi za male visine, kada je $g = const.$). Da bi se telo podiglo na visinu h od površine zemlje (sl. 5.4a), mora se izvršiti rad mgh. Ako se pusti da telo pada sa te visine, ono će izvršiti rad mgh.



Sl. 5.4: Telo mase m podignuto za visinu h na dva načina

Neka se, umesto kretanja naviše po vertikali, telo kreće po nekoj proizvoljnoj putanji u ravni xy (sl. 5.4b). Ono počinje sa kretanjem u tački sa ordinatom (visinom) y_1 i dostiže visinu y_2, pri čemu je $y_2 - y_1 = h$. Rad koji izvrši sila pri pomeranju za dl je

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \vec{Q}\, d\vec{l} = \int_{y_1}^{y_2} mg\, dl\, \cos\theta. \tag{5.15}$$

Sa slike 5.4b se vidi da je $\theta = 180° - \varphi$, pa je $\cos\theta = -\cos\varphi$, a $dl = dy/\cos\varphi$, tako da izraz (5.15) dobija oblik

$$A = -\int_{y_1}^{y_2} mg\, dy = -mg(y_2 - y_1), \tag{5.16}$$

gde je $y_2 - y_1 = h$ visina izmedju dva izabrana položaja tela. Iz izraza (5.16) vidi se da rad sile zavisi od visine, ali ne i od oblika trajektorije. Takve sile nazivaju se *konzervativne sile*. Za slučaj prikazan na slici 5.4b je $y_2 > y_1$, pa je rad sile teže negativan. Ako je $y_2 < y_1$ (telo pada naniže), rad je pozitivan.

Ako telo pada slobodno sa visine $h = y_2 - y_1$, ono nad drugim telom ili sistemom može izvršiti rad jednak $mgh = mg(y_2 - y_1)$. Na osnovu teoreme (5.10) može se odrediti promena potencijalne energije ΔE_p kada se telo pomeri iz tačke sa koordinatom y_1 u tačku sa koordinatom y_2

$$\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = mg(y_2 - y_1). \tag{5.17}$$

Prema tome, gornji izraz odredjuje promenu potencijalne energije izmedju dve tačke.

U saglasnosti sa izrazima (5.16) i (5.17), kao i teoremom (5.10), potencijalna energija u datoj tački, na visini h u odnosu na referentni nivo, data je izrazom

$$E_p = mgh. \tag{5.18}$$

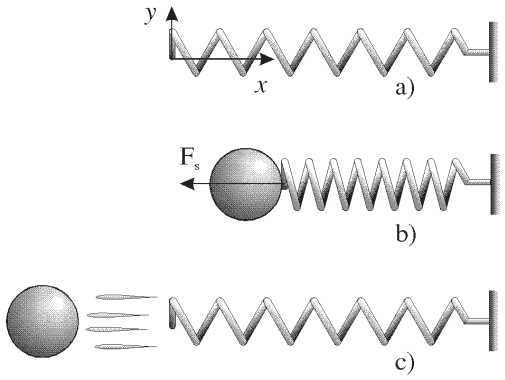
Uporedjivanjem izraza (5.16) i (5.17) može se zapaziti da je promena potencijalne energije jednaka radu koji vrši sila teže pri premeštanju tela sa visine y_1 na visinu y_2, sa znakom minus, tj.

$$\Delta E_p = -A = -\int_{y_1}^{y_2} \vec{Q} d\vec{l}. \tag{5.19}$$

Umesto ovog treba reći da je promena potencijalne energije ΔE_p jednaka radu koji vrši neka druga sila, jednaka po intenzitetu sili teže, koja potiče od čoveka koji (bez trenja) pomera telo suprotno sili teže.

Ovde će biti razmatran još jedan oblik potencijalne energije, koji je karakterističan za elastična tela i ima mnogo praktičnih primena. U sabijenom ili rastegnutom stanju opruga prikazana na slici 5.5 poseduje potencijalnu energiju koja, kada se oslobodi, može da izvrši rad nad kuglicom. Neka je koordinatni sistem izabran tako da se kraj rastegnute opruge nalazi u tački $x=0$ (sl. 5.5a), a pozitivni pravac je desni deo x-ose. Da bi se opruga održala u sabijenom (ili rastegnutom) stanju na rastojanju x, potrebno je na nju delovati silom $F=kx$. Po Trećem Njutnovom zakonu opruga deluje na kuglicu silom F_s, istog intenziteta, a suprotnog smera

$$F_s = -kx. \tag{5.20}$$



Sl. 5.5: Opruga može akumulirati elastičnu potencijalnu energiju kada je istegnuta (a) ili sabijena (b); ova energija se može iskoristiti za vršenje rada u trenutku njenog oslobadjanja (c)

U gornjem izrazu znak (–) pokazuje da su smerovi sila $\vec{F}$ i $\vec{F}_s$ suprotni (sl. 5.5b). Prema (5.19), promena potencijalne energije opruge izmedju koordinata $x_1=0$ (kada opruga nije deformisana) i $x_2=x$ je

$$\Delta E_p = E_p(x) - E_p(0) = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2},$$

gde je $E_p(x)$ potencijalna energija na rastojanju x, a $E_p(0)$ potencijalna energija u tački $x=0$. Prema tome, potencijalna energija opruge na rastojanju x od ravnotežnog položaja data je izrazom

$$E_p(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{5.21}$$

Ova energija poznata je pod nazivom *elastična potencijalna energija.*

5.3.3 Zakon održanja energije

Zakon održanja energije proizašao je na osnovu niza eksperimenata. Da bi se došlo do zakona održanja mehaničke energije, posmatraće se sistem tela (materijalnih tačaka), čije su mase m_1, m_2, m_3,...,m_n i brzine $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$,...,$\vec{v}_n$. Neka na ova tela deluju unutrašnje sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,...,$\vec{F}_n$ i spoljašnje sile $\vec{F}_{s1}$, $\vec{F}_{s2}$, $\vec{F}_{s3}$,..., $\vec{F}_{sn}$. Iz Drugog Njutnovog zakona sledi

$$\begin{aligned} m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{s1}, \\ m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{s2}, \\ m_3\frac{d\vec{v}_3}{dt} &= \vec{F}_3 + \vec{F}_{s3}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt} &= \vec{F}_n + \vec{F}_{sn}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Neka se tela za isti vremenski interval dt pomere za rastojanja $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$, $d\vec{x}_3$,...,$d\vec{x}_n$. Množenjem svake od jednačina u (5.23) odgovarajućim pomerajem i uzimajući da je $d\vec{x}_i = \vec{v}_i dt$, dobija se

$$\begin{aligned} m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}_1 + \vec{F}_{s1})d\vec{x}_1 = 0, \\ m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}_2 + \vec{F}_{s2})d\vec{x}_2 = 0, \\ m_3(\vec{v}_3 d\vec{v}_3) - (\vec{F}_3 + \vec{F}_{s3})d\vec{x}_3 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}_n + \vec{F}_{sn})d\vec{x}_n = 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Sabiranjem ovih jednačina, uzimajući da je sistem zatvoren, tj.

$$\vec{F}_{s1} + \vec{F}_{s2} + \cdots + \vec{F}_{sn} = 0,$$

dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{x}_i = 0. \tag{5.24}$$

Član

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} d(m_i v_i^2/2) = dE_k \tag{5.25}$$

predstavlja beskonačno malu promenu kinetičke, a $-\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{x}_i = dE_p$ beskonačno malu promenu potencijalne energije celog sistema. Prema tome, izraz (5.24) se može napisati u obliku

$$dE_k + dEp = 0. \tag{5.26}$$

Ukupna mehanička energija zatvorenog sistema je

$$E_k + E_p = const. \tag{5.27}$$

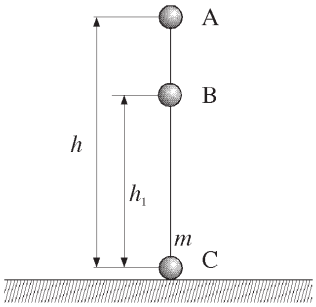
Izraz (5.27) predstavlja *Zakon održanja mehaničke energije*. On glasi:
U zatvorenom sistemu tela izmedju kojih deluju samo konzervativne sile mehanička energija se održava, tj. ne menja se u toku vremena.

Vezano za zakon održanja mehaničke energije, postoji teorema o minimumu potencijalne energije, koja glasi:
Stabilno stanje zatvorenog sistema je ono kod kojeg je potencijalna energija sistema minimalna.

Ukupna mehanička energija sistema u kome deluje sila trenja smanjuje se pri kretanju. U tom slučaju ne važi Zakon održanja mehaničke energije. Medjutim, pri "iščezavanju" mehaničke energije uvek postoji ekvivalentna količina energije drugog oblika. Prema tome:

Energija ne iščezava i ne pojavljuje se nova, već samo prelazi iz jednog oblika u drugi.
U tome što govori o neuništivosti materije i njenog kretanja i jeste fizička suština Zakona održanja energije.

Postoji niz primera koji ilustruju Zakon održanja mehaničke energije. Jedan od najjednostavnijih, koji će ovde biti razmatran, jeste slobodno padanje tela bez početne brzine u uslovima kada se sila trenja sa vazduhom može zanemariti. Neka se telo mase m nalazi na visini h iznad Zemlje (sl. 5.6). Pošto telo na ovoj visini miruje, raspolaže samo potencijalnom energijom, tj. njegova ukupna energija E jednaka je potencijalnoj energiji mgh. Kada se pusti da telo pada, njemu se tokom kretanja smanjuje potencijalna na račun povećanja kinetičke energije. Medjutim, ukupna energija u bilo kojoj tački putanje ostaje ista.



Sl. 5.6: Primer zakona održanja mehaničke energije

Na primer, u tački B na visini h_1, gde je brzina v, kinetička i potencijalna energija tela su

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_p = mgh_1. \tag{5.28}$$

U tom slučaju ukupna energija je

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh_1. \tag{5.29}$$

Na osnovu izraza (5.27) brzina se može izraziti kao

$$v = \sqrt{2g(h - h_1)}. \tag{5.30}$$

Zamenom izraza (5.29) u (5.28), za ukupnu energiju se dobija

$$E = mgh, \tag{5.31}$$

što je jednako energiji koju je telo imalo na visini h.

Neposredno pre udara o zemlju (tačka C), kinetička energija tela je

$$E_k = \frac{mv_1^2}{2}, \tag{5.32}$$

gde je v_1 njegova brzina neposredno pre udara. Potencijalna energija u ovom slučaju je $E_p = 0$. Pošto je

$$v_1 = \sqrt{2gh}, \tag{5.33}$$

ukupna energija $E = mgh$ ista je kao u polažajima A i B.

5.4 Sudari

5.4.1 Opšte karakteristike sudara

Jedan od primera primene Zakona održanja impulsa i energije je sudar dva tela. Pod sudarom se podrazumeva susret dva tela koji traje veoma kratko (10^{-4} do $10^{-6}s$). U tačkama dodira tela javljaju se unutrašnje sile čiji je intenzitet znatno veći od intenziteta spoljašnjih sila. Stoga se dejstvo spoljašnjih sila može zanemariti i problem svesti na sudar tela u zatvorenom sistemu.

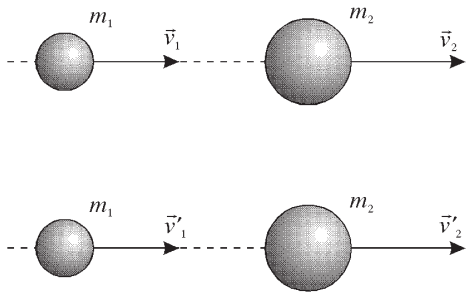
Sudar može biti *savršeno elastičan*, *savršeno neelastičan* i **delimično elastičan**. Savršeno elastičan je sudar tela pri kome njihova kinetička energija pre i posle sudara ostaje ista. Znači, pri sudaru tela mogu medjusobno da razmene deo kinetičke energije, ali ukupna kinetička energija sistema ostaje ista. Savršeno elastični sudari odigravaju se medju atomima i nuklearnim česticama.

U slučaju savršeno neelastičnog sudara, tela se posle sudara slepljuju i kreću zajedno kao jedno, ili miruju. U ovom slučaju ukupna kinetička energija sistema nije očuvana, jer se jedan njen deo pretvara u druge oblike energije, na primer toplotu.

Svi makroskopski sudari (sudari tela značajnih dimenzija) su delimično elastični.

5.4.2 Savršeno elastičan sudar

Ovde će se razmotriti savršeno elastičan sudar dve kuglice čiji se centri kreću duž jedne prave (sl. 5.7). Takav sudar naziva se *savršeno elastičan centralni sudar*. Neka se kuglica mase m_1 pre sudara kretala brzinom v_1, a kuglica mase m_2 brzinom v_2, pri čemu je $v_1 > v_2$. Brzine kuglica posle sudara su v_1' i v_2'.



Sl. 5.7: Savršeno elastičan sudar dve kuglice

Jednačine koje odredjuju kretanje kuglica pre i posle sudara su

- zakon održanja impulsa:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{5.34}$$

- zakon održanja kinetičke energije:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \tag{5.35}$$

Pošto se radi o centralnom sudaru i uniformnom kretanju, umesto vektora brzina uzeti su njihovi intenziteti. Posle sredjivanja izraza (5.34) i (5.35) dobija se

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \tag{5.36}$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2). \tag{5.37}$$

Deljenjem izraza (5.37) sa (5.36) konačno se dobija

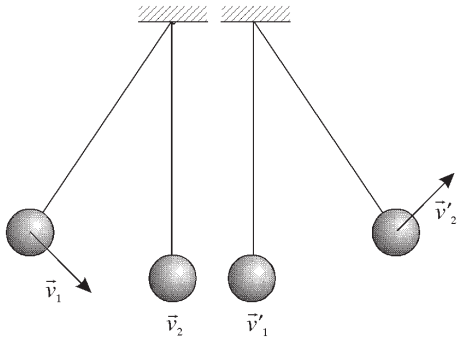
$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'. \tag{5.38}$$

Iz izraza (5.36) i (5.38) se nalaze brzine kuglica posle sudara:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{5.39}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{5.40}$$

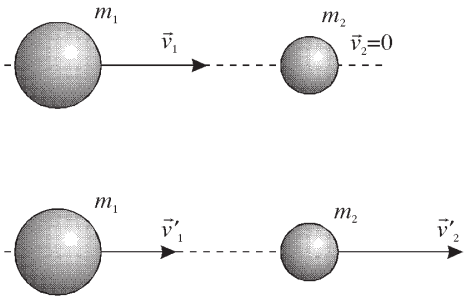
Dobijeni rezultati biće analiziran na nekoliko primera:



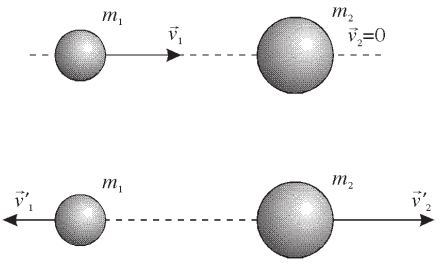
Sl. 5.8: Savršeno elastičan sudar kuglica kada je $m_1 = m_2$

a) *Sudar kuglica jednakih masa* ($m_1 = m_2$). Ako je druga kuglica mirovala ($v_2 = 0$), posle sudara prva kuglica se zaustavlja ($v'_1 = 0$), a druga se kreće istom brzinom kojom se kretala prva kuglica pre sudara ($v'_2 = v_1$) (sl. 5.8).

b) *Masa prve kuglice je veća od mase druge kuglice* ($m_1 > m_2$). Prva kuglica produžava da se kreće u istom smeru kao pre sudara, ali sa manjom brzinom ($v'_1 < v_1$). Brzina druge kuglice, koja se pre sudara nalazila u stanju mirovanja ($v_2 = 0$), posle sudara je veća od brzine prve kuglice posle sudara ($v'_2 > v'_1$) (sl. 5.9).



Sl. 5.9: Savršeno elastičan sudar kuglica kada je $m_1 > m_2$



Sl. 5.10: Savršeno elastičan sudar kuglica kada je $m_1 < m_2$

c) *Masa prve kuglice je manja od mase druge kuglice* ($m_1 < m_2$). Smer kretanja prve kuglice posle sudara se menja. Druga kuglica, koja se pre sudara nalazila u stanju mirovanja ($v_2 = 0$), posle sudara kreće se u istom smeru u kojem se kretala prva kuglica pre sudara, ali manjom brzinom ($v'_2 < v_1$) (sl. 5.10).

d) *Udar kuglice mase* m_1 *u telo znatno veće mase* m_2 ($m_2 \gg m_1$), *koje se nalazilo u stanju mirovanja* ($v_2 = 0$). Iz izraza (5.39) i (5.40) za ovaj slučaj sledi da je $v_1 = -v'_1$ i $v'_2 \approx 2m_1 v_1/m_2 \approx 0$. To znači da se kuglica mase m_1 odbija od tela mase m_2, koje i dalje ostaje u mirovanju, i kreće se istom brzinom kao pre sudara.

e) *Kuglice su jednakih masa* ($m_1 = m_2$) *i pre sudara imaju brzine* v_1 *i* v_2. Iz izraza 5.39) i (5.40) proizilazi da su brzine kuglica posle sudara $v'_1 = v_2$ i $v'_2 = v_1$, tj. zadržavaju vrednosti koje su imale pre sudara.

5.4.3 Savršeno neelastičan sudar

Savršeno neelastičan sudar može se demonstrirati sa kuglicama od gline ili olova koje se kreću u istom smeru (sl. 5.11). Ako su mase kuglica m_1 i m_2, a njihove brzine pre sudara v_1 i v_2, onda se Zakon održanja impulsa može napisati u obliku

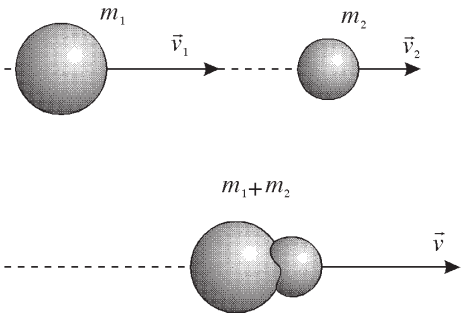
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v. \tag{5.41}$$

Zajednička brzina kuglica posle sudara v iznosi

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{5.42}$$

U slučaju da je $m_1 = m_2$, za v se dobija

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{5.43}$$



Sl. 5.11: Savršeno neelastičan sudar dve kuglice

Kao što je naglašeno, kod savšeno neelastičnog sudara dolazi do gubitka dela kinetičke energije usled njenog pretvaranja u toplotu ili druge oblike energije. Ovaj gubitak se može odrediti iz razlike kinetičkih energija tela pre i posle sudara

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}. \tag{5.44}$$

Zamenom izraza (5.42) za v u (5.44) dobija se

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{5.45}$$

Ako se telo mase m_2 pre sudara nalazilo u mirovanju ($v_2 = 0$), onda izraz (5.42) dobija oblik

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \tag{5.46}$$

pa je razlika kinetičkih energija pre i posle sudara

$$\Delta E_k = \frac{m_2 m_1 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{5.47}$$

Kada je $m_2 \gg m_1$ (masa nepokretnog tela je veoma velika), onda je $v \ll v_1$, pa skoro sva kinetička energija koju su tela posedovala pre sudara prelazi u druge oblike energije.

Kao što je naglašeno, pri sudaru tela značajnih dimenzija nastaje samo delimično elastičan sudar. Dakle, pri sudaru ovakvih tela uvek se pored elastičnosti javljaju i deformacije. U slučaju savršeno elastičnog sudara, saglasno jednačini (5.38), relativna brzina kuglica posle sudara $v_1' - v_2'$ jednaka je po intenzitetu njihovoj relativnoj brzini pre sudara $v_1 - v_2$, tj.

$$v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2). \tag{5.48}$$

Relativne brzine su istog pravca, a suprotnog smera. U slučaju savršeno neelastičnog sudara, relativna brzina posle sudara jednaka je nuli, pošto je $v_1' = v_2' = v$.

Ako je sudar delimično elastičan, relativna brzina tela posle sudara jednaka je delu relativne brzine pre sudara, tj.

$$v_1' - v_2' = -\varepsilon(v_1 - v_2), \tag{5.49}$$

gde je ε *koeficijent restitucije* (uspostavljanja), koji može imati vrednost od 0 do 1 (za savršeno elastičan sudar $\varepsilon = 1$, a za savršeno neelastičan $\varepsilon = 0$).

6. Statika čvrstog tela

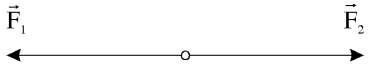
6.1 Predmet statike

Kada na neko telo deluje sila dovoljnog intenziteta, dolazi do njegovog ubrzanja. U najčešćem slučaju, kada na telo istovremeno deluje više sila, ono može da se kreće ubrzano, uniformno ili da ostane u miru. Ako se pod dejstvom sila telo izvodi iz stanja mirovanja tako da dolazi do njegovog ubrzanja, sile nisu uravnotežene. Medjutim, ako se pod dejstvom sila telo kreće uniformno ili ostaje u miru, sile su uravnotežene. Deo mehanike koji proučava uslove ravnoteže tela pod dejstvom sila naziva se **statika**.

Ovde će najpre biti razmatrano delovanje sila na materijalnu tačku i uslovi njene ravnoteže, a zatim delovanje sila na kruto telo. Pod krutim telom podrazumeva se telo koje se pod dejstvom sila ne deformiše. Inače, svako realno telo se pod uticajem sila, u zavisnosti od njihovog intenziteta, manje ili više deformiše. Medjutim, kada su sile malog intenziteta, čvrsta tela velike otpornosti trpe neznatne deformacije. Ovakva tela se sa odredjenom aproksimacijom mogu posmatrati kao kruta tela.

6.2 Uslov ravnoteže materijalne tačke

Najjednostavniji slučaj ravnoteže je kada na materijalnu tačku deluju dve sile istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera (sl. 6.1).



Sl. 6.1: Ravnoteža materijalne tačke pod dejstvom dve sile

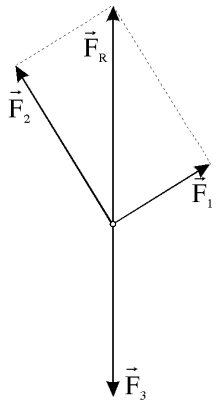
Ako na materijalnu tačku deluje više sila, njihova rezultanta jednaka je njihovom vektorskom zbiru, pa je uslov ravnoteže:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R = 0. \tag{6.1}$$

Prema uslovu geometrijskog sabiranja ovo je ispunjeno kada je poligon sila zatvoren. Na primer, kada na materijalnu tačku deluju tri sile, tada se sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ slože u rezultantu $\vec{F}_R$, koja mora da bude istog intenziteta i pravca sa trećom silom $\vec{F}_3$, a suprotnog smera (sl. 6.2). Na sličan način se može postupiti kada na materijalnu tačku deluje veći broj sila.

Uslovi ravnoteže materijalne tačke se mogu izraziti i preko komponenata sila u pravcu koordinatnih osa. Ako je rezultanta svih sila jednaka nuli, tada i zbir komponenata u pravcu svake koordinatne ose mora da bude jednak nuli, tj.

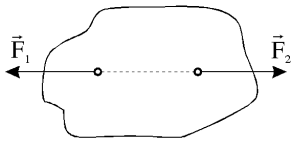
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$



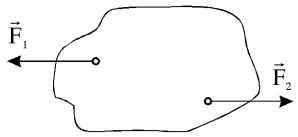
Sl. 6.2: Ravnoteža materijalne tačke pod dejstvom tri sile

6.3 Delovanje sila na kruto telo

Kada na kruto telo deluju dve sile istog pravca sa različitim napadnim tačkama (sl. 6.3), uslov ravnoteže je da su sile istog intenziteta, a suprotnog smera (u tom slučaju je vektorski zbir sila jednak nuli). Medjutim, ako na telo deluju sile istog intenziteta, čiji se pravci delovanja ne poklapaju (sl. 6.4), telo neće vršiti translatorno kretanje, ali će rotirati. Ovo pokazije da uslove ravnoteže krutog tela treba precizirati tako da ono ne vrši ni promenljivo translatorno, ni promenljivo rotaciono kretanje.

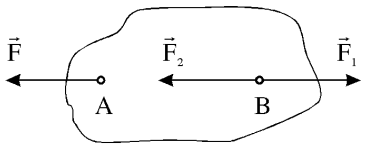


Sl. 6.3: Delovanje sila čiji se pravci poklapaju



Sl. 6.4: Delovanje sila čiji se pravci ne poklapaju

Dejstvo sile na kruto telo se ne menja ako se njena napadna tačka pomeri duž pravca tog dejstva. Neka na kruto telo deluje sila $\vec{F}$ sa napadnom tačkom A (sl. 6.3). Ako u proizvoljnoj tački B u pravcu delovanja sile $\vec{F}$ deluju sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, medjusobno suprotnog smera, a istog intenziteta kao $\vec{F}$, one neće imati nikakav uticaj na kretanje tela, pošto im je rezultanta jednaka nuli. Sistem od ove tri sile može se posmatrati na sledeći način. Sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_1$ teže samo da istegnu telo, a ne da ga pokrenu. Zato se, što se



Sl. 6.5: Uz objašnjenje pomeranja napadne tačke sile

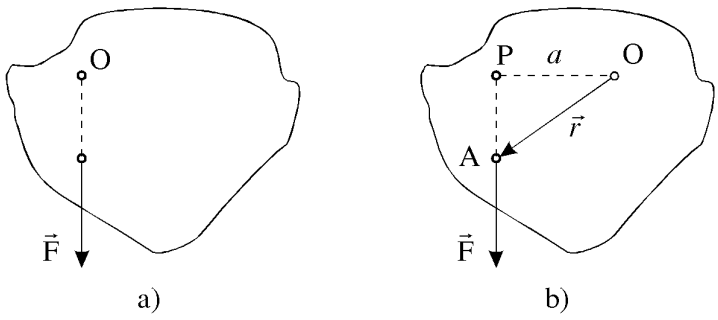
tiče kretanja tela, uzajamno dejstvo ove dve sile poništava i ostaje samo sila $\vec{F}_2$. Kao što se vidi, sistem sila $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ svodi se u jednom slučaju na silu $\vec{F}$, a u drugom na silu $\vec{F}_2$, što opravdava pomenuti stav o premeštanju napadne tačke sile.

6.4 Statički moment sile

Kao što je već naglašeno, telo pod uticajem sila može da vrši kako translatorno, tako i rotaciono kretanje oko ose ili tačke. Veličina koja karakteriše uticaj sile na rotaciju tela naziva se *statički moment sile* $\vec{M}$.

Da bi se došlo do izraza za statički moment sile, posmatraće se dejstvo sile na telo koje može da rotira oko tačke O (sl. 6.6). Kada se pravac dejstva sile poklapa sa tačkom O (sl. 6.6a), telo neće vršiti rotaciono kretanje. Ako pravac dejstva sile $\vec{F}$ ne prolazi kroz tačku O, doći će do rotacije tela. Eksperimentalno je pokazano da je efikasnost delovanja sile na rotaciju tela utoliko veća ukoliko je veće normalno rastojanje pravca delovanja sile od tačke O, tj. ukoliko je veći krak sile $a = \overline{PO}$ (sl. 6.6b). Prema tome, intenzitet statičkog momenta sile se može izraziti u obliku

(6.3)



Sl. 6.6: Uz objašnjenje statičkog momenta sile

Statički moment sile se može izraziti i pomoću vektora položaja $\vec{r}$ napadne tačke A u odnosu na tačku O, tj.

$$M = rF\sin(\vec{r}, \vec{F}). \tag{6.4}$$

Statički moment sile je vektorska veličina čiji je pravac normalan na ravan u kojoj leže vektor sile $\vec{F}$ i vektor položaja $\vec{r}$, tj. pravac vektora $\vec{M}$ se poklapa sa pravcem ose rotacije. Osa rotacije stoji normalno na ravan kojoj pripadaju $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Na slici 6.6b osa rotacije O stoji normalno na ravan crteža. Prema tome, statički moment sile se može prikazati kao vektorski proizvod vektora položaja $\vec{r}$ napadne tačke sile i sile $\vec{F}$ koja deluje na telo

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{6.5}$$

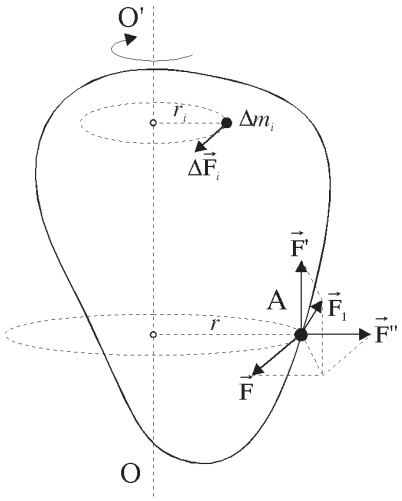
Smer statičkog momenta sile odredjuje se pravilom desnog zavrtnja ili desne ruke.

Jedinica za statički moment sile je Nm.

7. Dinamika rotacionog kretanja

7.1 Moment inercije

Kada kruto telo pod dejstvom sile $\vec{F}_1$ rotira oko stalne ose OO', sve njegove tačke opisuju kružnice čiji centri leže na ovoj osi (sl. 7.1). Sve tačke tela u datom trenutku imaju istu ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje.



Sl. 7.1: Uz objašnjenje momenta inercije

Sila $\vec{F}_1$ na slici 7.1 može se razložiti na tri komponente: $\vec{F}'$ paralelnu osi OO', $\vec{F}''$ normalnu na ovu osu i $\vec{F}$ normalnu na $\vec{F}'$ i $\vec{F}''$. Očigledno je da telo vrši rotaciono kretanje samo pod dejstvom komponente sile $\vec{F}$, koja ima pravac tangente na kružnicu poluprečnika r. Dejstvo sile na rotaciju, osim od njenog intenziteta, zavisi i od rastojanja napadne tačke od ose rotacije, tj. od momenta sile. U ovom slučaju intenzitet momenta sile M dat je izrazom

$$M = F\,r. \tag{7.1}$$

Neka je posmatrano telo podeljeno na elementarne mase. Pošto sila $\vec{F}$ dovodi do rotacije svih čestica, elementarna masa Δm_i će rotirati pod dejstvom elementarne sile $\Delta\vec{F}_i$ (sl. 7.1). Prema Drugom Njutnovom zakonu intenzitet ove sile se može izraziti kao

$$\Delta F_i = \Delta m_i a_i, \tag{7.2}$$

gde je a_i tangencijalno ubrzanje elementarne mase Δm_i. Kada se obe strane izraza (7.2) pomnože sa r_i, dobija se

$$\Delta F_i r_i = \Delta m_i a_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha. \tag{7.3}$$

Pošto je $\Delta F_i r_i = \Delta M_i$ moment sile koji dovodi do rotacije elementarne mase, uzimajući da je

$$\Delta m_i r_i^2 = \Delta I_i, \tag{7.4}$$

izraz (7.3) dobija oblik

$$\Delta M_i = \Delta I_i \alpha. \tag{7.5}$$

U izrazu (7.5) ΔI_i predstavlja moment inercije elementarne mase ili materijalne tačke.

Ukupni moment sile koji deluje na sve elementarne mase od kojih se sastoji telo dat je izrazom

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta I_i, \tag{7.6}$$

gde je $\sum_{i=1}^{n} \Delta I_i = I$ moment inercije tela. Ako se uzme da je $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i$, gornji izraz se može napisati u obliku

$$M = I\alpha. \tag{7.7}$$

Ovaj izraz predstavlja osnovni zakon dinamike rotacionog kretanja ili Drugi Njutnov zakon za rotaciono kretanje.

Iz izraza (7.7) se vidi da ugaono ubrzanje koje telu saopštava moment sile zavisi od momenta inercije tela. Ukoliko je veći moment inercije, utoliko je manje ugaono ubrzanje. Moment inercije karakteriše inercijalna svojstva tela pri rotacionom kretanju na sličan način kao što masa karakteriše inercijalna svojstva pri translatornom kretanju. Medjutim, za razliku od mase, moment inercije tela može imati mnoštvo značenja zbog mnogo mogućih osa rotacije. Prema tome, kada se govori o momentu inercije krutog tela, neophodno je definisati osu u odnosu na koju se on računa. U praksi se obično moment inercije računa u odnosu na osu simetrije tela. Jedinica za moment inercije je kgm^2.

Za što tačnije odredjivanje momenta inercije homogenog tela potrebno ga je podeliti na što manje elementarne mase Δm. Tačna vrednost bi se dobila ako bi se telo podelilo na beskonačno male mase. Tako dobijene beskonačno male mase označavaju se kao diferencijali mase dm. U tom slučaju postoji beskonačno mnogo elemenata dm, pa se zbir momenata inercije svih elemenata označava integralom po ukupnoj zapremini tela

$$\int r^2 dm. \tag{7.8}$$

Za izračunavanje ovog integrala potrebno je poznavati matematički izraz za vezu izmedju mase i poluprečnika. U tabeli 7.1 dati su momenti inercije nekih homogenih tela pravilnog geometrijskog oblika u odnosu na datu osu rotacije.

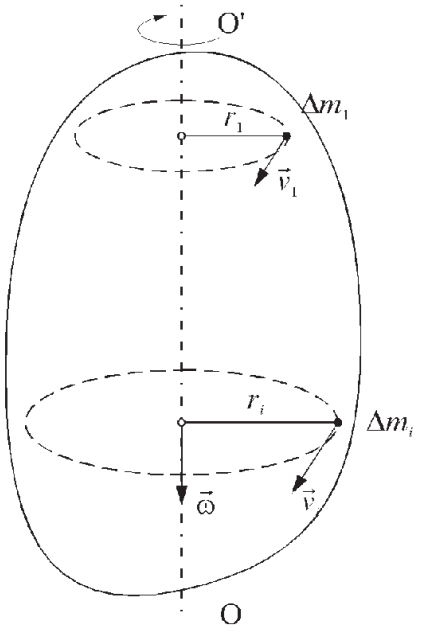
Tabela 7.1: Moment inercije nekih homogenih tela pravilnog geometrijskog oblika (m je ukupna masa tela)

Telo	Položaj ose rotacije	Moment inercije
Tanka ploča poluprečnika r	Normalna na ravni ploče, u centru	$mr^2/2$
Šuplji tanki cilindar poluprečnika r	Osa simetrije	mr^2
Sfera poluprečnika r	Bilo koji prečnik	$2mr^2/5$
Tanak štap dužine l	Osa normalna na dužinu l jednog kraja štapa	$ml^2/3$
Tanak štap dužine l	Osa normalna na dužinu l u centru štapa	$ml^2/12$

7.2 Kinetička energija, rad i snaga

Posmatraće se kruto telo koje rotira oko stalne ose OO' (sl. 7.2). Neka je telo podeljeno na male zapremine sa elementarnim masama Δm_1, Δm_2, Δm_3,...,Δm_n, na rastojanjima r_1, r_2, r_3,...,r_n od ose rotacije. Pri rotaciji krutog tela oko stalne ose sve elementarne mase opisuju krugove različitih poluprečnika r_i i imaju različite periferne brzine v_i. Medjutim, pošto se radi o krutom telu, ugaona brzina svih elementarnih masa je ista, tj.

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_3}{r_3} = \cdots = \frac{v_n}{r_n}. \tag{7.9}$$



Sl. 7.2: Uz objašnjenje kinetičke energije kod rotacionog kretanja

Kinetička energija krutog tela jednaka je zbiru kinetičkih energija elementarnih masa, tj.

$$E_k = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \frac{\Delta m_3 v_3^2}{2} + \cdots + \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} \tag{7.10}$$

ili

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}. \tag{7.11}$$

Korišćenjem izraza (7.9), za kinetičku energiju se dobija

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Prema tome, kinetička energija rotacionog kretanja tela je

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{7.12}$$

Može se zapaziti da je kinetička energija krutog tela koje rotira oko stalne ose data sličnim izrazom kao kinetička energija materijalne tačke kod translatornog kretanja, pri čemu moment inercije I odgovara masi m, a ugaona brzina ω perifernoj brzini v.

Kada telo istovremeno vrši i translatorno i rotaciono kretanje, njegova ukupna kinetička energija jednaka je zbiru kinetičke energije translacije i kinetičke energije rotacije, tj.

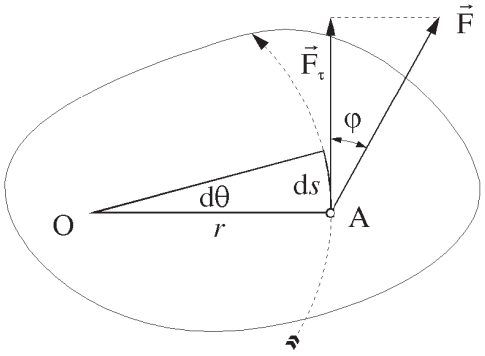
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{7.13}$$

Neka na kruto telo deluje spoljašnja sila $\vec{F}$ u tački A (sl. 7.3). Pod uticajem ove sile telo rotira oko stalne ose koja prolazi kroz tačku O i normalna je na ravan crteža. Kada se telo obrne za mali ugao $d\theta$, tačka A se pomeri za $ds = r d\theta$, i rad koji izvrši sila $\vec{F}$ iznosi

$$dA = F_\tau ds = F_\tau r d\theta, \tag{7.14}$$

gde je F_τ tangencijalna komponenta sile F. Pošto je $F_\tau \cdot r$ moment M sile F_τ u odnosu na osu rotacije, izraz (7.14) se može napisati u obliku

$$dA = M d\theta. \tag{7.15}$$



Sl. 7.3: Rad koji izvrši sila $\vec{F}$ pri ugaonom pomeraju $d\theta$

Za konačno ugaono pomeranje izvršeni rad je

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta. \tag{7.16}$$

Zamenom izraza (7.7) u (7.16) izraz za rad dobija oblik

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I\alpha d\theta. \tag{7.17}$$

Kako je $\alpha = d\omega/dt$ i $\omega = d\theta/dt$, izraz za rad kod rotacionog kretanja može se napisati kao

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2. \tag{7.18}$$

Iz ovog izraza se zapaža da je rad koji izvrši moment sile jednak promeni kinetičke energije usled rotacionog kretanja tela, što je slično teoremi o radu i energiji kod translatornog kretanja.

Ako se izraz (7.15) podeli intervalom vremena dt, dobija se

$$\frac{dA}{dt} = M\frac{d\theta}{dt}. \tag{7.19}$$

Pošto $dA/dt = P$ predstavlja snagu, a $d\theta/dt = \omega$ ugaonu brzinu, gornji izraz dobija oblik

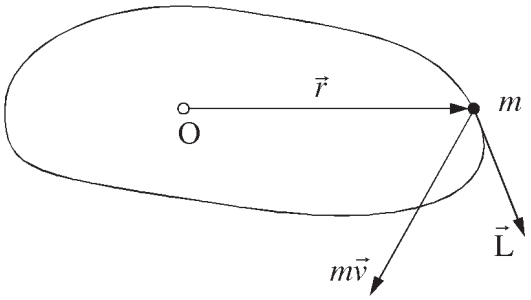
$$P = M\omega. \tag{7.20}$$

Ispravnost ovog izraza se najbolje može zapaziti kod prenosnog mehanizma automobilskog motora, koji se često naziva "menjač momenta sile". Automobilski motor daje punu snagu samo onda kada se obrće odredjenom ugaonom brzinom i daje odgovarajući moment sile. Kada se automobil ubrzava ili penje uz brdo, menjač momenta sile dozvoljava motoru da radi odredjenom brzinom, momentom sile i snagom, dok se ista snaga prenosi na pogonsku osovinu pri većem momentu sile i manjoj ugaonoj brzini.

7.3 Moment impulsa i zakon održanja momenta impulsa

Najpre će biti posmatran slučaj rotacionog kretanja materijalne tačke mase m, čiji je poluprečnik rotacije r (sl. 7.4). Rotacija se vrši oko stalne ose koja je normalna na ravan crteža i prolazi kroz tačku O. Proizvod rastojanja r materijalne tačke od ose rotacije i njenog ipmulsa naziva se *moment impulsa* L

$$L = mvr. \tag{7.21}$$



Sl. 7.4: Uz definiciju momenta impulsa materijalne tačke

Impuls je vektorska veličina, a položaj tela mase m u odnosu na tačku O može se odrediti vektorom položaja $\vec{r}$ (sl. 7.4). Prema tome, moment impulsa je vektorska veličina koja se može izraziti na sledeći način:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}. \tag{7.22}$$

Intenzitet ovog vektora je

$$L = rmv \sin(\vec{r}, m\vec{v}). \tag{7.23}$$

Kada vektori $\vec{r}$ i $m\vec{v}$ zaklapaju prav ugao, izraz (7.23) prelazi u (7.21).

Moment impulsa krutog tela u odnosu na stalnu osu može se dobiti ako se ono podeli na male zapremine, čije su mase Δm_1, Δm_2, Δm_3,..., Δm_i. Kako pri rotaciji tela periferna brzina v stoji uvek upravno na poluprečnik r, za moment impulsa L_i elementarne mase Δm_i može se upotrebiti izraz (7.21):

$$L_i = \Delta m_i v_i r_i. \tag{7.24}$$

Moment impulsa krutog tela u odnosu na stalnu osu jednak je sumi momenata impulsa svih elementarnih masa

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_i. \tag{7.25}$$

Pošto je kod rotacionog kretanja $v_i = \omega r_i$, za moment impulsa se dobija

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2, \tag{7.26}$$

tj.

$$L = I\omega. \tag{7.27}$$

Prema tome, moment impulsa krutog tela u odnosu na stalnu osu rotacije jednak je proizvodu momenta inercije tela u odnosu na istu osu i ugaone brzine.

Diferenciranjem izraza (7.27) po vremenu dobija se

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha = M, \tag{7.28}$$

ili, u vektorskom obliku

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{7.29}$$

Kod zatvorenog sistema moment spoljašnjih sila je jednak nuli ($\vec{M} = 0$), pa je

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

ili

$$\vec{L} = const., \tag{7.30}$$

odnosno

$$I\vec{\omega} = const. \tag{7.31}$$

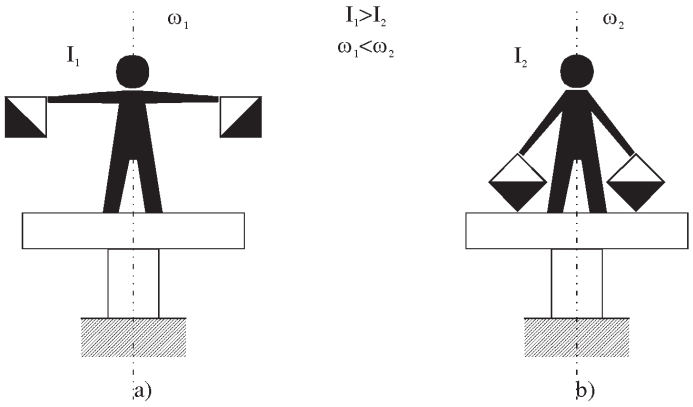
Izraz (7.31) predstavlja matematičku interpretaciju *zakona o održanju momenta impulsa*. Moment impulsa zatvorenog sistema se održava, tj. ne menja se u toku vremena.

Iz izraza (7.31) se zapaža da je u slučaju konstantnog momenta inercije, kada nema spoljašnjih sila, ugaona brzina takodje konstantna.

Ako se u odsustvu spoljašnjih sila menja moment inercije I, menja se i ugaona brzina ω, tako da proizvod $I\omega$ ostaje konstantan. Ako raste moment inercije, ugaona brzina opada, i obrnuto.

Zakon održanja momenta impulsa može da demostrira čovek koji stoji na stolici koja može da rotira bez trenja oko vertikalne ose (Prantlova stolica) (sl. 7.5). Neka se čovek, koji u raširenim rukama drži zastavice (sl. 7.5a), obrće zajedno sa stolicom ugaonom brzinom ω_1. Čovek poseduje moment impulsa $I_1\omega_1$, koji se održava. Kada spusti ruke, čovekov moment inercije se smanjuje, a ugaona brzina povećava, tako da je novi moment impulsa $I_2\omega_2$ isti kao za slučaj raširenih ruku ($I_1\omega_1 = I_2\omega_2$).

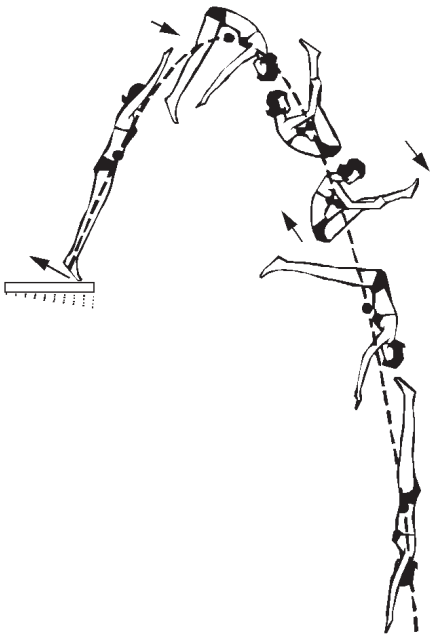
Zakon održanja momenta impulsa važi i za slučaj skakača u vodu (sl. 7.6). Skakač u momentu odvajanja od odskočne daske ima odredjenu vrednost momenta impulsa. Ako želi da napravi nekoliko obrtaja u vazduhu, on savija noge i ruke, tako da mu se moment inercije smanjuje, a ugaona brzina povećava. Neposredno pre pada u vodu, skakač ispruža ruke i noge, što dovodi do povećanja momenta inercije i smanjenja ugaone brzine. Moment inercije se u ovom slučaju povećava približno $3,5$ puta.



Sl. 7.5: Prantlova stolica

7.4 Analogija izmedju veličina translatornog i rotacionog kretanja

U prethodnim izlaganjima je naglašeno da postoji analogija izmedju veličina i izraza za translatorno i rotaciono kretanje. U tabeli 7.2 su sistematizovane i uporedjene neke veličine i izrazi koji karakterišu ove dve vrste kretanja.



Sl. 7.6: Različiti položaji skakača pre pada u vodu

Tabela 7.2: Veličine translatornog i rotacionog kretanja

Translatorno kretanje	Rotaciono kretanje
Masa m	Moment inercije I
Put s	Ugaoni pomeraj θ
Brzina $v = ds/dt$	Ugaona brzina $\omega = d\theta/dt$
Ubrzanje $a = dv/dt$	Ugaono ubrzanje $\alpha = d\omega/dt$
Impuls $K = mv$	Moment impulsa $L = I\omega$
Sila $F = ma = dK/dt$	Moment sile $M = I\alpha = dL/dt$
Rad $A = Fds$	Rad $A = Md\theta$
Snaga $P = Fv$	Snaga $P = M\omega$
Kin. energija $E_k = mv^2/2$	Kin. energija $E_k = I\omega^2/2$

8. Elastičnost

8.1 Vrste deformacija

U prethodnim odeljcima sila je razmatrana kao dinamički parametar koji dovodi do promene brzine tela. Smatralo se da tela pod dejstvom sile ne menjaju svoj oblik i dimenzije, tj. uveden je pojam krutog tela. U prirodi ne postoje kruta tela, već sva tela pod uticajem sila, pored promene brzine, mogu promeniti svoj oblik i dimenzije, tj. mogu se *deformisati*. Deformacije mogu biti *potpuno elastične* i *potpuno plastične*. Potpuno elastična deformacija je ona kod koje se po prestanku dejstva sila telo vraća u prvobitan oblik i dimenzije. Ako to nije slučaj, deformacija je potpuno plastična. Realna tela su negde izmedju ova dva granična slučaja. S druge strane, pojedina tela, koja u normalnim uslovima ispoljavaju elastična svojstva, pri promeni tih uslova ponašaju se kao tela sa izrazito plastičnim osobinama. Na primer, elastična čelična opruga zagrejana do visokih temperatura ponaša se kao plastično deformisano telo.

Deformacija je posledica delovanja sila u telu. Mehanizmi delovanja tih sila ni do danas nisu u potpunosti poznati. Proračun elastičnih i drugih svojstava sa stanovišta medjumolekularnih (medjuatomskih) sila u telima je predmet posebne grane fizike koja se naziva *fizika čvrstog stanja*.

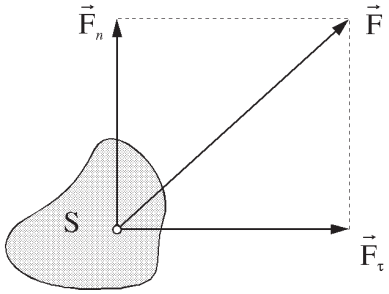
8.2 Napon i relativna deformacija

Kada dva čvrsta tela deluju jedno na drugo, dolazi do njihove deformacije. Dodirna površina ova dva tela uvek ima konačnu vrednost. Prema tome, kada se sila koja deluje na telo predstavi vektorom, on predstavlja rezultantu skupa sila koje deluju na tu dodirnu površinu. Ove sile, pored spoljašnjih, deluju i na unutrašnje elemente tela. U tom slučaju kaže se da je telo u napregnutom stanju.

Neka površina S na slici 8.1 predstavlja element tela na površini ili u unutrašnjosti na koji deluju sile čija je rezultanta $\vec{F}$. Količnik intenziteta ove sile i površine S naziva se *napon* σ koji deluje na posmatrani element

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{8.1}$$

Prema tome, napon je sila po jedinici površine. Kada je S beskonačno malo, reč je o naponu u tački koja pripada površini.



Sl. 8.1: Sila $\vec{F}$ koja deluje na malu površinu S, razložena na normalnu $\vec{F}_n$ i tangencijalnu komponentu $\vec{F}_\tau$

Sila $\vec{F}$ može se razložiti na komponentu $\vec{F}_n$, normalnu na element površine S, i tangencijalnu komponentu $\vec{F}_\tau$. Količnik normalne komponente sile i površine na koju ona deluje naziva se *normalni napon* σ_n, a količnik tangencijalne komponente i površine naziva se *tangencijalni napon* ili *napon smicanja* σ_τ

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}; \quad \sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}. \tag{8.2}$$

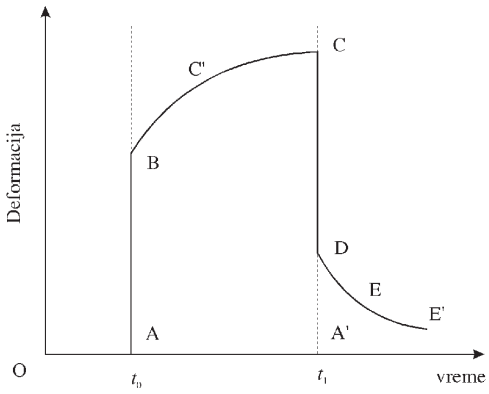
Jedinica za napon zove se *Paskal* ($Pa = Nm^{-2}$).

Deformacija nekog tela izražava se količnikom promene njegovih dimenzija usled dejstva sile i prvobitnih dimenzija. Ovaj odnos naziva se *relativna deformacija*. Eksperimentalno je pokazano da je kod elastičnih tela napon σ proporcionalan relativnoj deformaciji δ

$$\sigma = E\,\delta. \tag{8.3}$$

Koeficijent proporcionalnosti E naziva se *modul elastičnosti* i njegova vrednost zavisi od vrste materijala. Izraz (8.3) predstavlja matematičku interpretaciju Hukovog (Hooke) zakona za elastičnu deformaciju tela. Ovaj Zakon važi do odredjene granice pri naprezanju materijala. Ova granica se naziva *granica proporcionalnosti* i nalazi se ispred granice elastičnosti.

Eksperimentalno je pokazano da čvrsta tela imaju složenu zavisnost deformacije od vremena, koja nije obuhvaćena Hukovim zakonom. Deformacija se ne uspostavlja u potpunosti odmah po početku delovanja sile. Takodje, po prestanku njenog delovanja, deformacija ne iščezava potpuno, već jedan njen deo ostaje i polako se smanjuje sa vremenom. Zavisnost elastične deformacije od vremena prikazana je na slici 8.2. Ako u trenutku t_o na telo počne da deluje sila, početna elastična deformacija AB se uspostavlja vrlo brzo, a zatim pod dejstvom sile deformacija lagano raste s vremenom (kriva $BC'C$). Ako u trenutku t_1 sila prestane da deluje, deformacija prvo brzo opadne za vrednost CD jednaku AB, a zatim polako opada u toku vremena (kriva DEE'). Dakle, po prestanku dejstva sile zadržava se odredjena deformacija $A'D$, koja postepeno opada, pošto se telo vraća u svoj prvobitni oblik i dimenzije. Deformacija koju telo zadržava izvesno vreme po prestanku dejstva sile naziva se *remanentna* ili *zaostala deformacija*.



Sl. 8.2: Promena elastične deformacije tokom vremena

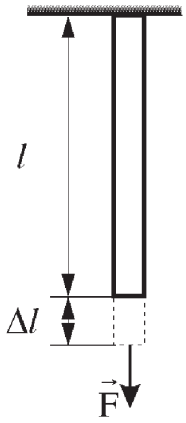
U nekim čvrstim telima deformacija $BC'C$ ima plastičan karakter. Takva tela se, kada na njih deluju dugotrajne sile malog intenziteta, ponašaju kao tečnosti, dok se pod dejstvom kratkotrajnih sila velikog intenziteta ponašaju kao krta tela. Ovakve osobine, na primer, pokazuju led i smola.

8.3 Vrste elastičnih deformacija

Elastične deformacije tela koje nastaju pod dejstvom sila mogu se svesti na dva oblika: istezanje (ili sabijanje) i smicanje. Kada sila deluje normalno na površinu tela, dolazi do promene rastojanja izmedju čestica tela (molekula, atoma ili jona) i taj oblik deformacije naziva se istezanje (ili sabijanje). Kada sila deluje tangencijalno, dolazi do smicanja slojeva čestica i takva deformacija naziva se smicanje.

8.3.1 Istezanje

Neka na štap (ili žicu) dužine l i konstantne površine preseka S deluje konstantna sila $\vec{F}$, čiji se pravac dejstva poklapa sa osom štapa (sl. 8.3). Ako se radi o maloj površini preseka štapa, može se aproksimativno uzeti da se javlja samo normalni napon $\sigma = F/S$.



Sl. 8.3: Istezanje žice ili štapa pod dejstvom sile

Pod dejstvom sile F štap se izduži za Δl, pa je relativna deformacija $\delta = \Delta l/l$. Tada je, prema Hukovom zakonu (8.3), veza izmedju normalnog napona i relativne deformacije data izrazom

$$\frac{F}{S} = E_y \frac{\Delta l}{l}, \tag{8.4}$$

gde je E_y Jungov (Young) modul elastičnosti. Gornji izraz može se napisati i u obliku

$$F = E_y S \frac{\Delta l}{l} = k\Delta l, \tag{8.5}$$

gde je k konstanta. Izraz (8.5), takodje, izražava Hukov zakon, iz koga se vidi da je izduženje štapa pri elastičnoj deformaciji proporcionalno sili koja deluje na njega. Nekada se koristi i *koeficijent elastičnosti*, koji predstavlja recipročnu vrednost Jungovog modula elastičnosti ($e=1/E_y$).

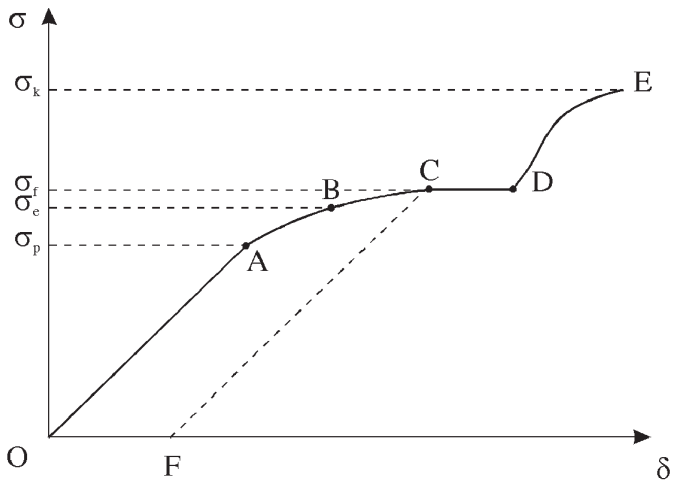
Deformacija čvrstih tela ponaša se po Hukovom zakonu samo do odredjene granice. Strogo govoreći, zavisnost relativne deformacije od napona nije linearna, ali odstupanja od linearnosti nisu velika za male vrednosti relativne deformacije. Grafički prikaz procesa istezanja za metalni štap (ili žicu) dat je na slici 8.4. Linearna zavisnost važi do granice proporcionalnosti σ_p. Po prestanku dejstva sile telo će se vratiti u prvobitan oblik i dimenzije po liniji AO. Pri daljem povećanju napona deformacija je još elastična, ali ne postoji linearna zavisnost izmedju normalnog napona i relativne deformacije (oblast AB). Ovakvo ponašanje se javlja do granice elastičnosti σ_e. Po prestanku dejstva sile, telo će se takodje vratiti u prvobitni oblik i dimenzije, i to po liniji BAO. Ako se i dalje povećava napon, kod štapa se pojavljuje zaostala deformacija, tako da se po prestanku dejstva sile smanjenje deformacije ne odigrava po liniji $CBAO$, već po CF. Napon pri kome se pojavljuje zaostala deformacija približno do 2% naziva se *početak fluidnosti* σ_f (odgovara tački C na krivoj). U oblasti CD, koja se naziva *oblast fluidnosti* ili *plastične deformacije*, deformacija raste iako se napon ne povećava. Materijali kod kojih je oblast fluidnosti znatna nazivaju se *viskozni*, a oni za koje ova oblast praktično ne postoji *krti* materijali. Pri daljem istezanju nastaje potpuna plastična deformacija tela (oblast DE). Maksimalni napon, pri kome dolazi do kidanja tela naziva se *granica kidanja* σ_k i odgovara tački E na krivoj.

Ako bi se umesto istezanja posmatralo sabijanje, dobio bi se isti grafik, ali u trećem kvadrantu.

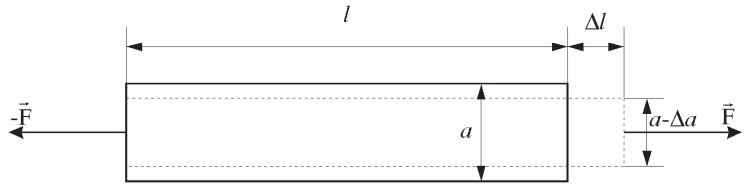
Kada pod dejstvom sile dolazi do istezanja štapa, njegove transverzalne dimenzije se smanjuju. Neka se štap dužine l, čiji je poprečni presek kvadrat stranice a, nalazi pod dejstvom sile koja vrši njegovo istezanje (sl. 8.5). Usled dejstva sile dužina štapa postaje $l + \Delta l$, a stranica $a - \Delta a$. Količnik relativne transverzalne i longitudinalne deformacije

$$\mu = \frac{\Delta a/a}{\Delta l/l} \tag{8.6}$$

naziva se Poasonov (Poisson) odnos ili Poasonov koeficijent. Veličina μ je pozitivna i za većinu metala iznosi oko $0,3$. Recipročna vrednost Poasonovog odnosa $n=1/\mu$ naziva se Poasonov broj.



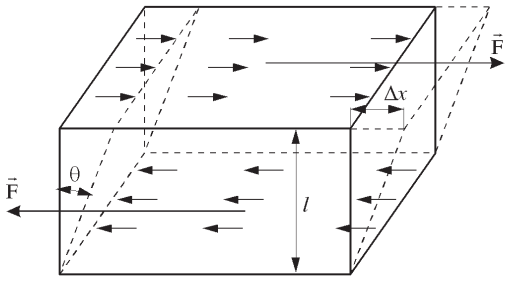
Sl. 8.4: Tok relativne deformacije čvrstih tela u zavisnsti od napona



Sl. 8.5: Promena dimenzija štapa pri istezanju

8.3.2 Smicanje

Posmatraće se paralelopiped od datog materijala koji je sa donje strane pričvršćen za podlogu (sl. 8.6). Na gornjoj površini ovog paralelopipeda deluje tangencijalna sila $\vec{F}$, čije je dejstvo rasporedjeno po celoj površini. Pošto je paralelopiped sa donje strane pričvršćen za podlogu, na donju površinu će delovati sila istog intenziteta kao na gornju, ali suprotnog smera (sila reakcije). Pod dejstvom ove sile telo će se deformisati tako što će doći do smicanja gornjih slojeva materijala u odnosu na donje.



Sl. 8.6: Promena oblika tela pri smicanju

Sa slike se vidi da je smicanje izazvano spregom sila usled kojeg se vertikalne strane paralelopipeda zakreću za ugao θ. Pošto je deformacija elastična, ugao θ je mali, pa se može uzeti da je $\theta \approx \tan\theta$. Sa slike 8.6 se vidi da je

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{l} \approx \theta, \tag{8.7}$$

gde $\Delta x/l$ predstavlja relativnu deformaciju koja se izražava uglom θ. Relativna deformacija je srazmerna količniku sile i površine na koju ona deluje i u ovom slučaju se naziva tangencijalni napon $\sigma_\tau = F/S$. Prema tome, veza izmedju tangencijalnog napona i relativne deformacije je

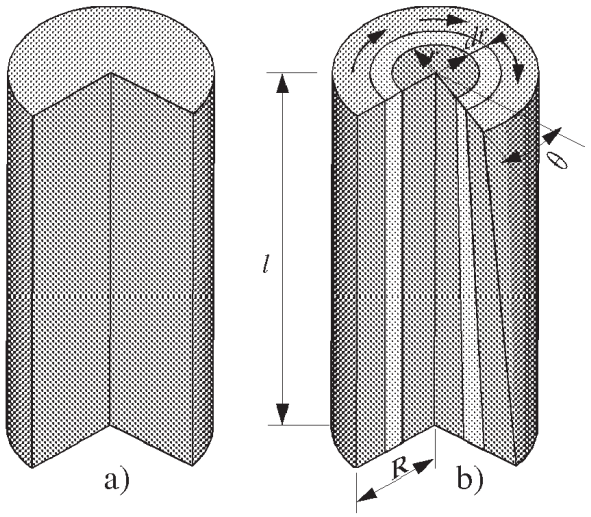
$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} = E_s \frac{\Delta x}{l}, \tag{8.8}$$

gde je E_s modul smicanja. Iz izraza (8.7) i (8.8) proizilazi da se modul smicanja može izraziti u obliku

$$E_s = \frac{F/S}{\Delta x/l} = \frac{\sigma_\tau}{\theta}. \tag{8.9}$$

8.3.3 Torzija

Torzija (uvijanje ili upredanje) je specijalan slučaj smicanja. Najčešći, ujedno i najjednostavniji oblik torzije javlja se kod štapa kružnog preseka. Na slici 8.7 prikazan je presek takvog štapa dužine l i poluprečnika R, kada nije pod naponom (sl. 8.7a) i kada deluju tangencijalne sile koje izazivaju torziju (sl. 8.7b).



Sl. 8.7: Uz objašnjenje torzije

Sa slike 8.7b se vidi da je usled torzije gornja strana uvijena u odnosu na donju za ugao θ. Tangencijalne sile rasporedjene po gornjoj površini prikazane su strelicama. Slične sile, ali suprotnog smera, rasporedjene su po donjoj površini. Posmatraće se delovanje tangencijalnih sila na tanak sloj štapa čiji presek ima oblik kružnog prstena poluprečnika r i debljine dr (svetlije zasenčeno). Gornja ivica ovog sloja pomerena je u odnosu na donju za rastojanje $r\theta$. Prema tome, relativna deformacija sloja iznosi $r\theta/l$. Neka je dF rezultanta tangencijalnih sila koje deluju na gornji deo sloja. Površina preseka ovog sloja je $2\pi r dr$, a napon $dF/(2\pi r dr)$. Na osnovu izraza (8.8) sila dF se može izraziti u obliku

$$dF = E_s(2\pi r dr)\frac{r\theta}{l} = \frac{2\pi E_s\theta}{l}r^2 dr. \tag{8.10}$$

Moment ove sile je

$$dM = rdF = \frac{2\pi E_s\theta}{l}r^3 dr. \tag{8.11}$$

Moment sile potreban da se ceo štap uvije za ugao θ dobija se integracijom gornjeg izraza u granicama od $r=0$ do $r=R$

$$M = \frac{2\pi E_s\theta}{l}\int_o^R r^3 dr = \frac{\pi E_s R^4\theta}{2l}, \tag{8.12}$$

ili

$$M = c\theta, \tag{8.13}$$

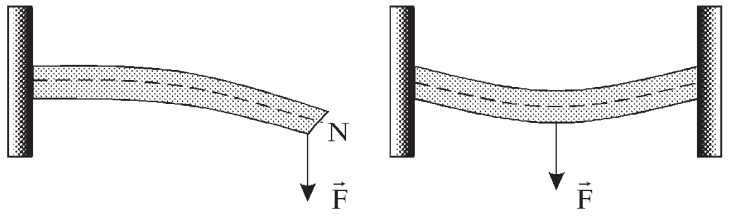
gde je $c=(\pi E_s R^4)/2l$ torziona konstanta.

Torzija materijala se vrlo često javlja kod mašina, transmisija, dizalica itd. Rad neke mašine se obično prenosi na zamajac ili druge mašine putem uvijanja vratila ili transmisije. Usled takve torzije u vratilu se pojavljuje naprezanje na smicanje. Zahvaljujući torziji konstruisana je torziona vaga, koju je koristio

Kevendiš (Cavendish) za odredjivanje gravitacione konstante. Zahvaljujući torzionim osobinama žice, moguće je pomoću instrumenata kao što su voltmetar, ampermetar, itd. izmeriti odgovarajuće električne veličine.

8.3.4 Savijanje

Pored torzije, važan oblik deformacije u tehnici je savijanje. Ovakva vrsta deformacije javlja se kod štapa koji je na jednom kraju učvršćen, a na drugom deluje sila, ili kod štapa koji je učvršćen na oba kraja, a po sredini deluje sila. Na slici 8.8a prikazan je štap od elastičnog materijala pravougaonog preseka, koji je jednim krajem učvršćen za nepokretni oslonac, a na drugi kraj deluje sila F (konzola). Usled dejstva sile doći će do savijanja štapa koje je srazmerno njenom intezitetu. Prilikom savijanja gornja strana štapa postaje ispupčena i duža, a donja izdubljena i kraća od prvobitne dužine l. Izmedju ovih slojeva se nalazi neutralni sloj N, čija je dužina pri savijanju ostala ista.



Sl. 8.8: Savijanje štapa utvrdjenog na jednom (a) i na oba kraja (b)

Slučaj kada je štap učvršćen na oba kraja, a sila deluje po njegovoj sredini, prikazan je na slici 8.8b. Veličina s koja karakteriše savijanje štapa može se izraziti kao

$$s = k\frac{Fl^2}{Eah^3}, \tag{8.14}$$

gde je l dužina štapa pre savijanja, E modul elastičnosti, a i h stranice površine poprečnog preseka štapa, a k koeficijent koji zavisi od načina na koji je štap učvršćen (ako je učvršćen na jednom kraju $k=4$, a ako je učvršćen na oba kraja $k=0,06$).

Treba naglasiti da se u praksi javljaju mnogo složeniji slučajevi savijanja od ovde razmatranog. U praksi se najčešće koriste metalne šipke koje nisu konstantne površine poprečnog preseka, sile ne deluju u ravni, a i težina same šipke se mora uzeti u obzir. U tom slučaju teorijske analize nisu dovoljne, već se teorija mora dopunjavati eksperimentalnim podacima. Najčešće se koriste eksperimentalni podaci koje daje *metoda fotoelastičnosti*.

8.4 Unutrašnja elastična potencijalna energija tela

Pri elastičnoj deformaciji dolazi do pomeranja čestica (atoma, molekula ili jona) u telu. Za ovo pomeranje potrebno je da se savladaju unutrašnje sile, tj. da se izvrši rad koji se manifestuje kao povećanje unutrašnje elastične potencijalne energije tela.

Neka na štap dužine l i površine poprečnog preseka S deluje sila F, koja mu poveća dužinu za Δl (sl. 8.9). Rad spoljašnje sile F_1 koja štap dužine $l+x$ izduži za dx je

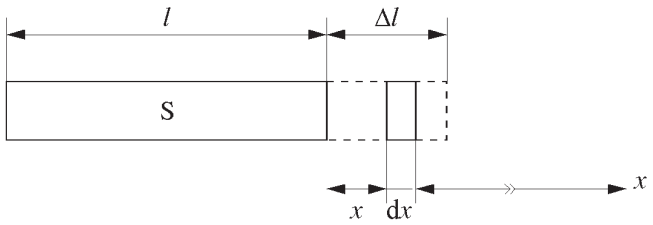
$$dA = F_1 dx \tag{8.15}$$

Iz izraza (8.4) i (8.15) sledi

$$dA = E_y S\frac{(l+x)-l}{l}dx = E_y S\frac{x}{l}dx. \tag{8.16}$$

Ukupan rad spoljašnje sile potreban za povećanje dižine štapa za Δl, jednak je unutršnjoj elastičnoj potencijalnoj energiji E_p i dobija se integracijom gornjeg izraza u granicama od $x=0$ do $x=\Delta l$

$$E_p = A = \frac{E_y S}{l}\int_0^{\Delta l} x dx = \frac{1}{2}\frac{E_y S}{l}\Delta l^2 = \frac{1}{2}F\Delta l. \tag{8.17}$$



Sl. 8.9: Rad pri deformaciji štapa

Elastična potencijalna energija po jedinici zapremine, tj. *gustina energije* može se izraziti u obliku

$$\frac{F\Delta l}{2Sl} = \frac{1}{2}\frac{F}{S}\frac{\Delta l}{l}. \tag{8.18}$$

Kako F/S predstavlja napon, a $\Delta l/l$ relativnu deformaciju, može se zaključiti da je elastična potencijalna energija jednaka polovini proizvoda napona i relativne deformacije. Na kraju treba istaći da se analogne zavisnosti dobijaju i za druge vrste deformacija.

9. Mehanika fluida

9.1 Pritisak u fluidu

Eksperimentalno je ustanovljeno da fluidi u miru deluju odredjenim silama na dno i zidove suda. Ako se u takav fluid unese tanka ploča, ona će takodje ostati u miru. To znači da će na svaki element površine ploče ΔS delovati sile $\Delta\vec{F}$, koje će biti istog intenziteta i normalne na površinu ΔS, bez obzira na orijentaciju ploče. Ako ovo ne bi bio slučaj, došlo bi do kretanja pločice u fluidu.

Fizička veličina jednaka količniku normalne sile ΔF koja deluje na element površine ΔS nekog tela u dodiru sa fluidom i same te površine naziva se pritisak

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{9.1}$$

Ako je pritisak konstantan u svakoj tački površine, izraz (9.1) se može napisati u obliku

$$p = \frac{F}{S}. \tag{9.2}$$

Pritisak je skalarna veličina, a jedinica je *Paskal* (Pa).

Eksperimentalno je ustanovljeno da se pritisak u fluidima podjednako prenosi u svim pravcima. Pri prenošenju pritiska u tečnostima razlikuju se **hidraulični (spoljašnji) pritisak** i *hidrostatički (unutrašnji) pritisak*. Spoljašnji pritisak nastaje pod dejstvom neke spoljašnje sile na tečnost koja se nalazi u zatvorenom sudu. Hidrostatički pritisak potiče od težine same tečnosti.

9.2 Paskalov zakon

Za razliku od čvrstih tela, gde se spoljašnji pritisak prenosi samo u pravcu dejstva sile, kod tečnosti se on prenosi podjednako u svim pravcima. To se može pokazati sledećim ogledom. Uzme se gumena lopta, koja je pričvršćena za staklenu cev C debelih zidova u kojoj se nalazi pokretni klip k (sl. 9.1). Lopta i cev se napune vodom. Ako se na klip deluje nekom silom, lopta će zadržati isti oblik, ali će joj se zapremina povećati. Na osnovu ove činjenice se zaključuje da se pritisak podjednako prenosi u svim pravcima. Ova tvrdnja, takodje, može da se proveri pomoću suda u kome se nalazi neka tečnost (sl. 9.2). Kao što se vidi, sud sadrži dva cilindra sa pokretnim klipovima k_1 i k_2 čije su površine S_1 i S_2. U ovom slučaju će se zanemariti gravitaciona sila i smatrati da je tečnost nestišljiva, tj. da pod dejstvom sile zapremina tečnosti ostaje konstantna. Ako se na klip k_1 deluje nekom stalnom silom F_1, on će se pomeriti za neko rastojanje x_1, pri čemu će iz cilindra biti istisnuta zapremina tečnosti S_1x_1. Usled toga će tečnost delovati na klip k_2 silom F_2 i doći će do njegovog pomeranja za rastojanje x_2, pa je zapremina utisnute tečnosti u drugi cilindar S_2x_2. Pošto se radi o nestišljivoj tečnosti, ove dve zapremine su jednake, tj.

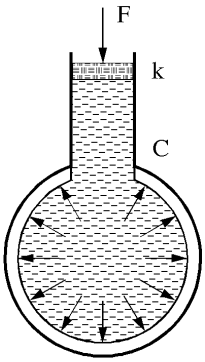
$$S_1x_1 = S_2x_2. \tag{9.3}$$

Osim toga, kada se klip k_1 pomera na putu x_1 sila F_1 vrši rad

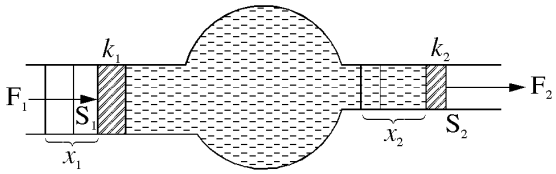
$$A_1 = F_1x_1 = p_1S_1x_1, \tag{9.4}$$

a rad koji vrši sila F_2 pri pomeranju klipa k_2 na putu x_2 je

$$A_2 = F_2x_2 = p_2S_2x_2. \tag{9.5}$$



Sl. 9.1: Promena zapremine gumene lopte usled dejstva spoljašnje sile

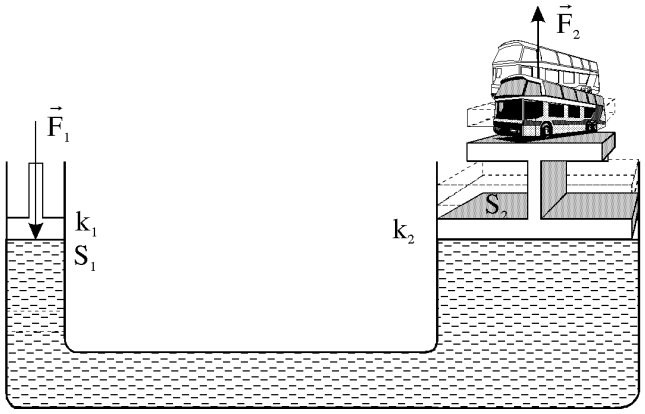


Sl. 9.2: Uz objašnjenje Paskalovog zakon

Pošto je $A_1 = A_2$, korišćenjem izraza (9.3), (9.4) i (9.5) se dobija da je

$$p_1 = p_2. \tag{9.6}$$

Gornji izraz predstavlja matematičku interpretaciju Paskalovog (Pascal) zakona, koji može da se formuliše na sledeći način:
Pritisak izazvan spolja na ma kom mestu neke tečnosti zatvorene sa svih strana prenosi se u njoj podjednako u svim pravcima.



Sl. 9.3: Hidraulična presa

Na Paskalovom zakonu zasnovan je rad niza praktičnih mehanizama. Ovde će biti razmotrena dva takva primera: hidraulična presa i hidraulični kočioni sistem. Kod hidraulične prese (sl. 9.3) se silom F_1 deluje na klip k_1 manjeg preseka, a time i na tečnost. Iz Paskalovog zakona sledi da se pritisak $p = F_1/S_1$ podjednako prenosi u svim pravcima, pa i na klip k_2 većeg preseka S_2, na koji sada deluje ukupna sila $F_2 = pS_2$. Pošto je

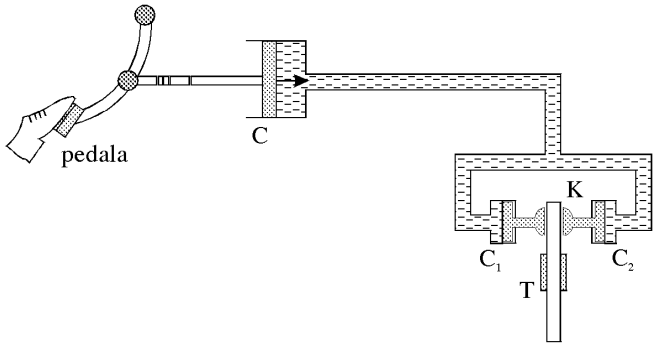
$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}, \tag{9.7}$$

to je

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \tag{9.8}$$

Dakle, sila koja deluje na veći klip veća je od sile koja deluje na manji klip onoliko puta koliki je odnos površina klipova.

Kod hidrauličnog kočionog sistema (sl. 9.4) se pritiskom noge na pedalu kočnice deluje na cilindar C veće površine preseka (glavni cilindar). Ta sila se prenosi na dva cilindra, C_1 i C_2, manjih površina preseka, čiji su klipovi vezani za kočione obloge K koje pritiskaju disk spojen sa točkom automobila T. Na taj način dolazi do kočenja automobila.



Sl. 9.4: Hidraulični kočioni sistem

9.3 Hidrostatički pritisak

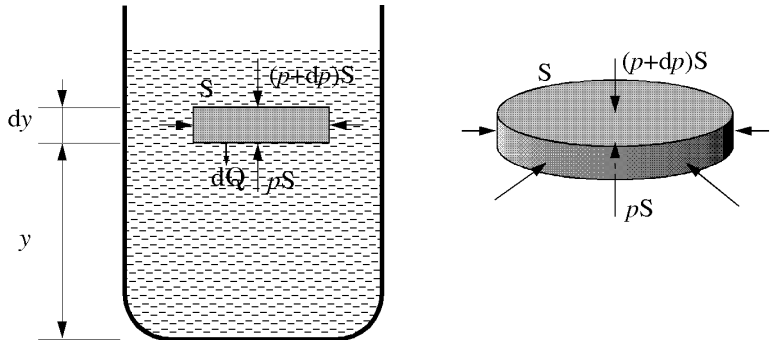
Kao što je već navedeno, hidrostatički pritisak potiče od težine samog fluida. Ovakav pritisak se, na primer, javlja na dnu suda koji je ispunjen tečnošću ili kod stuba vazduha koji pritiska neku površinu. Potrebno je naći izraz koji daje zavisnost pritiska od visine. Ovde će to biti uradjeno za tečnost ($\varrho = const.$). Neka se u sudu nalazi tečnost koja je izložena samo dejstvu gravitacione sile (sl. 9.5). Zamisli se element tečnosti u obliku tanke ploče površine S i debljine dy. Pošto pritisak u tečnostima deluje u svim pravcima podjednako, horizontalne sile kojima tečnost deluje na bočnu površinu posmatranog elementa biće medjusobno uravnotežene. Pošto tečnost miruje, i vertikalne sile koje deluju na ovaj element moraju da budu uravnotežene. Neka je p pritisak na donjoj, a $p + dp$ pritisak na gornjoj površini elementa. Sila sa smerom na gore, koja deluje na donju površinu, je pS, a sila sa smerom na dole, koja deluje na gornju površinu, je $(p + dp)S$. Ako se sa $dQ = \varrho g S dy$ označi težina posmatranog elementa, onda se ravnoteža vertikalnih sila može izraziti na sledeći način:

$$pS - \varrho g S dy - (p + dp)S = 0, \tag{9.9}$$

ili

$$dp = -\varrho g dy. \tag{9.10}$$

Ovaj izraz opisuje promenu pritiska sa visinom u unutrašnjosti tečnosti. Znak (–) pokazuje da se pritisak



Sl. 9.5: Sile koje deluju na element tečnosti koja se nalazi u ravnoteži

smanjuje sa povećanjem visine, i obrnuto. Ako je u unutrašnjosti fluida na visini y_1 pritisak p_1, a na

visini y_2 pritisak p_2 (sl. 9.6), izraz (9.10) se može napisati u obliku

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \varrho\, g\, dy, \tag{9.11}$$

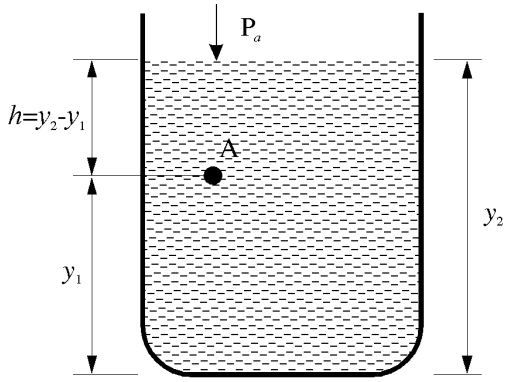
ili

$$p_2 - p_1 = -\varrho g(y_2 - y_1). \tag{9.12}$$

Ovaj izraz važi za slučaj kada je sud zatvoren. Ako je sud otvoren na gornjem kraju (sl. 9.6), u nekoj tački A, na visini y_1 od dna suda, pritisak je $p_1 = p$, a na površini tečnosti atmosferski pritisak $p_2 = p_a$. Onda izraz dobija oblik

$$p = p_a + \varrho g h. \tag{9.13}$$

U gornjem izrazu član $\varrho g h$ definiše težinu stuba tečnosti i naziva se hidrostatički pritisak.



Sl. 9.6: Pritisak na visini h

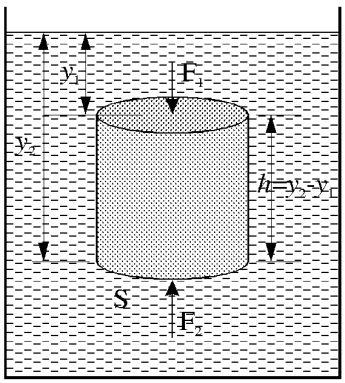
9.4 Sila potiska i Arhimedov zakon

Telo zaronjeno u tečnost (ili gas) gubi od svoje težine. Na primer, ako se kamen koga je veoma teško podići sa zemlje potopi u bazen sa vodom, sa lakoćom se može podići do površine vode. Ako se nastavi sa njegovim podizanjem iznad površine vode, kamen ponovo postaje veoma težak. Mnoga tela, naročito ona od drveta, plivaju na površini vode. Iz ovih primera može se zapaziti da na svako telo koje je potopljeno u tečnost (gas), pored sile teže (sa smerom na dole), deluje još jedna sila, sa smerom na gore, koja teži da istisne telo iz tečnosti. Ova sila se naziva *sila potiska*.

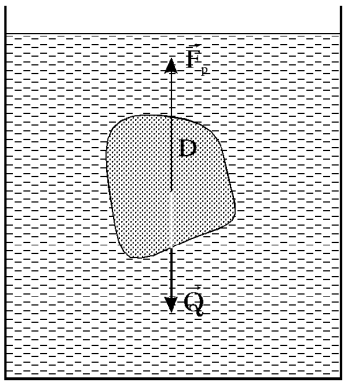
Sila potiska se javlja zbog toga što pritisak u tečnosti (gasu) raste sa dubinom. Usled toga je sila pritiska na donju površinu potopljenog tela (sa smerom naviše) veća od sile pritiska na gornju površinu (sa smerom naniže). Da bi se uprostio problem, razmotriće se telo oblika cilindra visine h i površine bazisa S, čija osa stoji vertikalno u odnosu na površinu tečnosti u koju je potopljen cilindar (sl. 9.7). Na gornju površinu cilindra deluje pritisak $p_1 = \varrho g y_1$, a odgovarajuća sila je $F_1 = p_1 S = \varrho g y_1 S$. Na donju površinu cilindra deluje sila $F_2 = p_2 S = \varrho g y_2 S$. Razlika ove dve sile predstavlja silu potiska

$$F_p = F_2 - F_1 = \varrho g(y_2 - y_1)S = \varrho g h S = \varrho g V, \tag{9.14}$$

gde je $V = hS$ zapremina cilindra. Pošto je ϱ gustina tečnosti (gasa), proizvod $\varrho g V = mg$ brojno je jednak sili teže sredine koja zauzima zapreminu jednaku zapremini cilindra. Prema tome, sila potiska koja deluje na cilindar jednaka je po intenzitetu težini tečnosti koja je istisnuta cilindrom. Ovo važi za bilo koji oblik tela. Ovu pojavu prvi je uočio Arhimed (Archimed), pa je nazvana Arhimedov zakon. On glasi:
Na svako telo potopljeno u tečnost deluje sila potiska koja je jednaka težini tečnosti istisnute tim telom.



Sl. 9.7: Uz objašnjenje sile potiska



Sl. 9.8: Uz Arhimedov zakon

Ispravnost Arhimedovog zakona može se pokazati i na sledeći način. Na telo D nepravilnog oblika, potopljeno u tečnost (sl. 9.8), deluju sila teže Q i sila potiska F_p. Ako je $Q > F_p$, telo će se kretati naniže. Kada se telo ukloni iz tečnosti, ona će ispuniti njegovo mesto. Ako je tečnost koja zauzima mesto tela u ravnoteži, njena težina je jednaka sili potiska. Kako je tečnost zauzela zapreminu i oblik tela koje je potopljeno, i na telo mora da deluje ista sila potiska, jednaka težini istisnute tečnosti. Potisak ne zavisi od prirode tečnosti i tela, već samo od njihovih gustina i ubrzanja g.

Iz Arhimedovog zakona proizilazi da u slučaju kada je gustina tela veća od gustine tečnosti, telo tone. Kada je gustina tečnosti veća od gustine tela, sila potiska je veća od sile teže, pa telo izranja na površinu, tj. pliva. U graničnom slučaju, kada su gustine tela i tečnosti jednake, sila potiska i sila teže tela su jednake—telo lebdi.

Kada telo pliva, ono se samo jednim delom nalazi iznad površine tečnosti, tako da dolazi do uspostavljanja ravnoteže izmedju sile potiska i sile teže. Sila potiska deluje samo na onaj deo tela koji se nalazi ispod površine tečnosti. Koliki deo tela će biti potopljen u tečnost zavisi od njegove težine i gustine tečnosti.

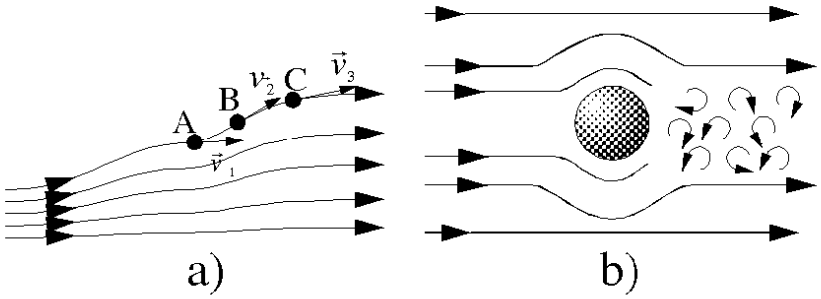
9.5 Karakteristike strujanja

Deo mehanike fluida koji se bavi proučavanjem zakona kretanja tečnosti i gasova naziva se *dinamika fluida*. Mnoge pojave dinamike fluida nisu do kraja objašnjene, ali se odredjenim pojednostavljenjima problema može doći do dobrih predstava o kretanju fluida.

Jedna od metoda za proučavanje kretanja fluida je posmatranje svake čestice (ili malih elementarnih zapremina) posebno. Njihovo kretanje može da se opiše pomoću Drugog Njutnovog zakona mehanike. Medjutim, kako se radi o velikom broju čestica, taj račun je veoma složen. Umesto toga najčešće se koristi drugi način rešavanja ovog problema: svojstvo fluida se razmatra u svakoj tački prostora. Umesto da se prati trajektorija svake čestice posebno, nalaze se parametri kretanja fluida u svakoj tački prostora koji izražavaju brzinu za svaku tačku kao funkciju vremena.

Razlikuju se dva osnovna tipa strujanja fluida: *laminarno* i *turbulentno* strujanje. Ako je strujanje takvo da slojevi fluida klize jedan pored drugog, onda je to laminarno kretanje. Karakteristično za ovakvo kretanje je da se svaka čestica fluida kreće po glatkoj trajektoriji, pri čemu se ove trajektorije ne seku (sl. 9.9a). Kada brzina fluida predje odredjenu granicu, koja zavisi, kao što će se kasnije videti, od niza parametara, strujanje postaje turbulentno. Ovakvo kretanje karakteriše pojava vrtloga (sl. 9.9b), pri čemu se javlja značajno unutrašnje trenje koje se naziva *viskoznost*. Viskoznost se javlja i kod laminarnog kretanja, ali je znatno manja nego kod turbulentnog. Laminarno kretanje je lako razlikovati od turbulentnog ako se u tečnost koja se kreće ubace kapi neke lako uočljive boje.

Za laminarno i turbulentno strujanje postoji nekoliko važnih karakteristika. Prva je da se fluid može razmatrati kao stišljiv ili kao nestišljiv materijal. Mada ne postoji materijal koji bi bio apsolutno nestišljiv, strujanje mnogih tečnosti je takvo da je promena gustine kod njih veoma mala. Na primer, pri povećanju



Sl. 9.9: Laminarno (a) i turbulentno strujanje (b)

pritiska od 10^5 do 10^7 Pa gustina vode se poveća za samo $0,5\%$. Gas se takodje može smatrati nestišljivim, pod uslovom da je strujanje takvo da razlika pritisaka nije suviše velika. Kada se stišljivost zanemari, razmatranje pojava u fluidu se značajno pojednostavljuje.

Kod svakog fluida je prisutna viskoznost, čija vrednost zavisi od vrste fluida. Fluidi kod kojih se mogu zanemariti viskoznost i stišljivost nazivaju se *idealni fluidi*.

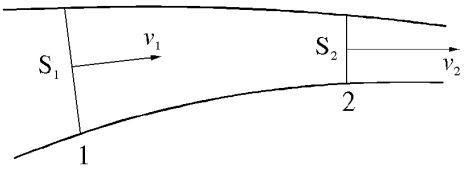
Strujanje fluida može biti *stacionarno* i *promenljivo*. Kod stacionarnog strujanja brzina strujanja fluida u bilo kojoj tački prostora je konstantna u toku vremena, ali to ne znači da je ona ista u svim tačkama prostora. Ako se brzina strujanja u datoj tački prostora menja u toku vremena, strujanje je promenljivo.

9.6 Stacionarno strujanje. Teorema kontinuiteta strujanja

Putanja koju sledi jedan element fluida pri laminarnom kretanju naziva se *strujna linija* (sl. 9.9a). Uopšte uzevši, brzina elementa se menja i po intenzitetu i po pravcu duž strujne linije. Ako svaki element koji prolazi kroz datu tačku sledi istu liniju strujanja kao i prethodni element, to je stacionarno strujanje.

Strujne linije predstavljaju krive u čijim se svim tačkama tangenta poklapa sa pravcem brzine elemenata fluida (sl. 9.9a). Uobičajeno je da se strujne linije povlače tako da njihova gustina bude veća tamo gde je veća brzina strujanja tečnosti, a manja tamo gde se tečnost sporije kreće. U slučaju stacionarnog strujanja brzina fluida u datoj tački ostaje konstantna u toku vremena. U tom slučaju strujne linije se ne menjaju i poklapaju se sa trajektorijama elementa fluida.

Deo fluida ograničen strujnim linijama čini *strujnu cev* (sl. 9.10). Svi elementi fluida koji se nalaze u nekom preseku strujne cevi produžavaju da se kreću u strujnoj cevi ne izlazeći iz nje, a ni jedan element fluida van strujne cevi ne ulazi u nju.



Sl. 9.10: Strujna cev

Neka su na strujnoj cevi izabrana dva normalna preseka 1 i 2, čije su površine poprečnih preseka S_1 i S_2. Brzine strujanja fluida na ovim presecima su v_1 i v_2. Pošto se radi o nestišljivom fluidu, gustina ϱ je ista u oba preseka. Zapremina fluida koja prodje kroz presek 1 za vreme dt jednaka je zapremini cilindričnog elementa osnove S_1 i visine $v_1 dt$, tj. $S_1 v_1 dt$. Masa fluida koja prodje kroz ovaj presek za vreme dt je $\varrho S_1 v_1 dt$. Masa koja za isto vreme prodje kroz presek 2 iznosi $\varrho S_2 v_2 dt$. Pošto se radi o

stacionarnom strujanju, mase fluida koje za isto vreme prodju kroz preseke 1 i 2 moraju biti iste:

$$\varrho S_1 v_1 dt = \varrho S_2 v_2 dt, \tag{9.15}$$

ili

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \tag{9.16}$$

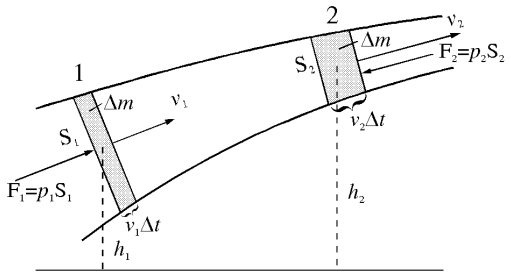
Pošto jednakost važi za ma koja dva preseka strujne cevi, uopšte se može napisati da je

$$Sv = const., \tag{9.17}$$

tj. da je proizvod brzine strujanja i površine poprečnog preseka strujne cevi konstantna veličina. Izraz (9.17) poznat je pod nazivom *teorema kontinuiteta strujanja* i prikazuje zapreminu fluida koji ističe u jedinici vremena (zapreminski protok). Iz izraza (9.17) proizilazi da pri smanjenju poprečnog preseka strujne cevi brzina strujanja raste, i obratno. Ovo se može proveriti ako se u fluid ubace mali delići nekog čvrstog tela i posmatra njihovo kretanje.

9.7 Bernulijeva jednačina

Neka se u strujnoj cevi koja je nagnuta u odnosu na horizontalu u stacionarnom stanju kreće idealan fluid (sl. 9.11). Na preseku 1 ove strujne cevi, na visini h_1 u odnosu na horizontalu (referentni nivo), brzina fluida je v_1, a pritisak p_1. Analogno, na preseku 2, na visini h_2, brzina fluida je v_2, a pritisak p_2. Ako je $p_1 > p_2$, tečnost će se kretati s leva na desno. Za vremenski interval Δt kroz oba preseka cevi prolazi ista masa fluida Δm.



Sl. 9.11: Kretanje tečnosti u stujnoj cevi

Mase fluida Δm u posmatranim presecima 1 i 2 imaju kinetičke energije $(\Delta m v_1^2)/2$ i $(\Delta m v_2^2)/2$ i potencijalne energije $\Delta m g h_1$ i $\Delta m g h_2$. Promena ukupne enregije ΔE jednaka je razlici ukupnih energija masa Δm koje proteknu kroz ove preseke za vreme Δt

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right). \tag{9.18}$$

U skladu sa zakonom održanja energije, promena energije jednaka je radu ΔA spoljašnjih sila (sila pritiska) za pomeranje mase Δm

$$\Delta E = \Delta A. \tag{9.19}$$

Potrebno je odrediti ovaj rad. Spoljašnja sila F_1 vrši rad ΔA_1 za premeštanje utisnute mase Δm na putu $v_1 \Delta t$. U isto vreme istisnuta masa Δm vrši rad ΔA_2 nasuprot spoljašnjoj sili pritiska F_2 na putu $v_2 \Delta t$. Prema tome, može se napisati

$$\Delta A_1 = F_1 v_1 \Delta t; \quad \Delta A_2 = -F_2 v_2 \Delta t. \tag{9.20}$$

Stvarni rad je jednak zbiru ova dva rada

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t. \tag{9.21}$$

Pošto je $F_1 = p_1 S_1$ i $F_2 = p_2 S_2$, to je

$$\Delta A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t. \tag{9.22}$$

Kako se radi o nestišljivom fluidu, može se napisati $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V$, gde je ΔV zapremina fluida mase Δm. Prema tome, izraz (9.22) dobija oblik

$$\Delta A = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V. \tag{9.23}$$

Korićenjem izraza (9.18), (9.19) i (9.23) dobija se:

$$p_2 \Delta V + \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 = p_1 \Delta V + \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \tag{9.24}$$

Ako se izraz (9.24) podeli sa ΔV i uzme da je $\Delta m / \Delta V = \varrho$, gde ϱ predstavlja gustinu fluida, konačno se dobija

$$p_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2} + \varrho g h_2. \tag{9.25}$$

Za bilo koji presek strujne cevi važi

$$p_u = p + \frac{\varrho v^2}{2} + \varrho g h = const., \tag{9.26}$$

što znači da je ukupan pritisak u tečnosti koja se kreće konstantan na bilo kom preseku strujne cevi. Izraz (9.26) naziva se *Bernulijeva* (Bernouli) *jednačina* ili *Bernulijev zakon*. Prvi član predstavlja spoljašnji, drugi brzinski, a treći visinski pritisak.

9.8 Primena Bernulijeve jednačine

Bernulijeva jednačina biće primenjena u nekoliko jednostavnijih primera za izračunavanje brzine isticanja fluida ili zapreminskog protoka.

9.8.1 Toričelijeva teorema

Na slici 9.12 predstavljen je sud površine poprečnog preseka S_1 u kome se do visine h nalazi tečnost gustine ϱ. Sud je na gornjem kraju otvoren, a na njegovoj bočnoj strani se nalazi otvor površine poprečnog preseka S_2 kroz koji ističe tečnost brzinom v_2. Na gornjem kraju suda i bočnom otvoru deluje atmosferski pritisak p_a. Ako je $S_1 \gg S_2$, brzina v_1 kojom se spušta tečnost u sudu biće znatno manja od brzine isticanja tečnosti v_2 ($v_1 \ll v_2$), pa se može uzeti da je $v_1 \approx 0$. Ako se za referentni nivo uzme sredina otvora, tada se Bernulijeva jednačina za ovaj slučaj može napisati u obliku

$$p_a + \varrho g h = p_a + \frac{\varrho v_2^2}{2}, \tag{9.27}$$

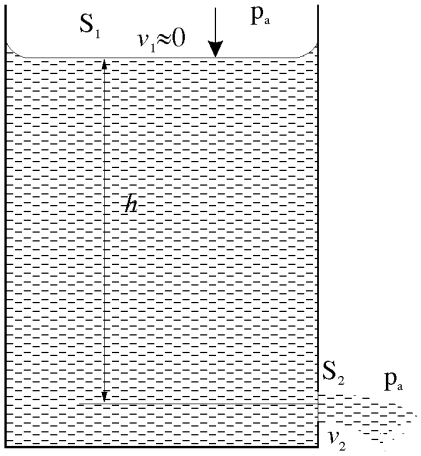
odakle se dobija

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \tag{9.28}$$

Ovaj izraz pokazuje da je brzina isticanja tečnosti iz šireg suda ista kao brzina ma kog tela koje je slobodno palo sa visine h. Ovo je Toričelijeva teorema, koja važi i za otvor na dnu suda.

9.9 Viskoznost

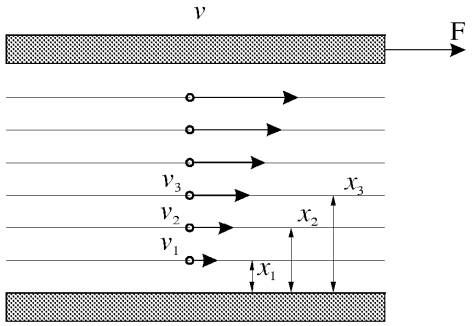
Kao što je već naglašeno, kod realnog fluida postoji unutrašnje trenje koje se naziva *viskoznost*. Viskoznost se može zamisliti kao trenje koje se javlja pri kretanju slojeva sredine koji su u dodiru. U tečnostima je viskoznost uslovljena kohezionim silama koje deluju medju molekulima, dok kod gasova nastaje usled sudara atoma i molekula.



Sl. 9.12: Isticanje tečnosti kroz otvor

Viskoznost zavisi od vrste tečnosti. Na primer, glicerin ima veću viskoznost od vode, mast za podmazivanje pojedinih delova mašina od motornog ulja i sl. Tečnosti, uopšte govoreći, imaju veću viskoznost od gasova.

Njutn je dao zakon po kome se trenje u tečnostima ponaša analogno trenju kod čvrstih tela u mehanici. Neka se izmedju dve ploče nalazi neka tečnost. Jedna ploča je nepomična, a druga se kreće paralelno njoj brzinom v, kao što je prikazano na slici 9.13. U mislima se ova tečnost izdeli na slojeve male debljine. Na slojeve koji se nalaze neposredno uz ploče deluju adhezione sile izmedju molekula sredine i molekula materijala ploče. Sloj tečnosti koji se nalazi uz gornju ploču kretaće se istom brzinom kao ona, sloj ispod njega manjom brzinom, i tako redom, dok će sloj uz nepokretnu ploču mirovati. Pretpostavlja se da se slojevi kreću jedan preko drugog, tj. da je u pitanju laminarno kretanje, koje se može ostvariti pri relativno malim brzinama.



Sl. 9.13: Laminarno kretanjeviskozne tečnosti

Ako se gornja ploča pod dejstvom sile F kreće uniformno, tada će sila unutrašnjeg trenja F_{tr} biti uravnotežena sa ovom silom. Njutn je ustanovio da sila unutrašnjeg trenja zavisi od vrste fluida, površine dodirnih slojeva S i gradijenta brzine (priraštaja brzine po jedinici debljine sloja) dv/dx:

$$F_{tr} = F = \eta S \frac{dv}{dx}. \tag{9.29}$$

Koeficijent proporcionalnosti η zavisi od vrste tečnoti i naziva se *koeficijent dinamičke viskoznosti*. Što je koeficijent viskoznosti veći, tečnost više odstupa od idealne. Jedinica za koeficijent dinamičke viskoznosti je $Pa\,s$.

Pored koeficijenta dinamičke viskoznosti, koristi se i koeficijent kinematičke viskoznosti ν, koji predstavlja odnos dinamičkog koeficijenta viskoznosti i gustine tečnosti

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho}. \tag{9.30}$$

Koeficijent dinamičke viskoznosti zavisi od temperature fluida. Tako, na primer, koeficijent viskoznosti vode na 0℃ iznosi $0,001775\,Pa\,s$, a na 90℃ oko $0,00032\,Pa\,s$. Koeficijent dinamičke viskoznosti ricinusovog ulja se, pri povećanju temperature od 18℃ na 40℃, smanji četiri puta.

Poznato je da se danas kod automobila, u zavisnosti od namene i godišnjeg doba, koriste ulja različite viskoznosti. Njihova viskoznost se izražava prema posebnoj skali američkog društva automobilskih inženjera (Society of Automotive Engineers—SAE) kao, na primer, SAE10, SAE30, SAE90, itd. Što je broj na oznaci veći, ulje je viskoznije. Tako se u automobilskom motoru zimi upotrebljava ulje SAE10, a leti SAE30. U diferencijalu i menjaču brzina upotrebljava se ulje SAE90. Na temperaturi 55℃ koeficijent dinamičke viskoznosti ulja SAE30 iznosi $0,4\,Pa\,s$, a SAE10 oko $0,1\,Pa\,s$.

10. Toplota i temperatura

10.1 Temperatura i termička ravnoteža

Kada se rukom dodirnu dva tela, od kojih je jedno bilo uronjeno u smešu vode i leda, a drugo u vodu koja ključa, zapaža se izvesna razlika izmedju njih. Kaže se da je jedno telo hladno, a drugo toplo. Kvantitativna mera za stepen zagrejanosti tela naziva se *temperatura*. Na ovaj način definisan pojam temperature daje samo njen kvalitativan karakter. Za odredjivanje kvantitativnog karaktera temperature neophodno je uvesti pojam *toplotne ravnoteže*. Ovaj pojam se može objasniti na osnovu sledećeg primera. Ako komad zagrejanog metala dodje u kontakt sa komadom leda, dolazi do topljenja leda i hladjenja metala. Ovaj proces traje dok se temperature oba tela ne izjednače. Pri kontaktu tela dolazi do razmene toplote, usled čega se energija metala smanjuje, a energija leda (pri topljenju) povećava.

Reč *toplota* se upotrebljava dvojako: kao *toplotna energija* tela i kao razmenjena *količina toplote*, koja je ekvivalentna radu i predstavlja meru promene energije. Ova nejednoznačnost često može dovesti do nejasnoće pri sagledavanju ekvivalentnosti toplote i rada kao dve fizičke veličine izmedju kojih postoji kvantitativna veza. Ove veličine su dimenziono jednake i izražavaju se istim jedinicama. Kada se "troši" toplota, umesto nje nastaje odredjeni rad, i obrnuto: kada se vrši rad, pojavljuje se, ili kako se obično kaže, "razvija" se toplota. I u jednom i u drugom slučaju se smatra da se toplota pretvara u rad, odnosno rad u toplotu. Dakle, ove fizičke veličine su povezane fizičkim procesima, a ne sa stanjem sistema. Stoga se toplota može definisati kao proces prenošenja energije molekula sa jednog tela na drugo.

Treba istaći da je opšti naziv za toplotnu ravnotežu *termodinamička ravnoteža*, zbog činjenice da procesi koji se pojavljuju prilikom uspostavljanja ravnoteže, kao i u toku njenog održavanja, sadrže veći broj dinamičkih procesa, o čemu će kasnije biti više reči. Činjenica da pri termodinamičkoj ravnoteži prestaju svi makroskopski procesi često se naziva *opšti princip termodinamike*. Pod makroskopskim promenama se podrazumevaju sve one promene koje su dostupne posmatranju različitim čulima i instrumentima, uključujući i promenu temperature.

10.2 Termometri

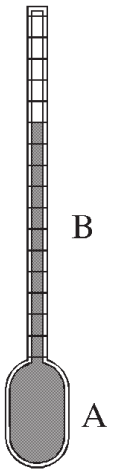
Gradacija temperature čulom dodira je gruba procena temperature tela, pa se ne može primeniti u nauci i tehnici. Za merenje temperature potrebno je upotrebiti neku merljivu fizičku veličinu koja se menja sa temperaturom. Pri promeni temperature može se menjati dužina i zapremina čvrstih tela, zapremina tečnosti, pritisak gasa u sudu konstantne zapremine, električna otpornost, boja (talasna dužina) zagrejanog tela itd. Instrumenti koji koriste ove osobine tela za merenje temperature nazivaju se *termometri*.

Pri merenju temperature termometar se dovodi u kontakt sa telom čija se temperatura meri. Očitavanje se vrši tek onda kada se uspostavi toplotna ravnoteža izmedju tela i termometra.

Ovde će biti razmotreni neki od najčešće upotrebljivanih termometara.

Termometar sa tečnošću sastoji se iz proširenja A sa tankim staklenim zidovima na koje se nastavlja staklena kapilara B, koja je na gornjem kraju zatopljena i iz koje je evakuisan vazduh (sl. 10.1). Tečnost, kao što je živa ili obojeni alkohol, ispunjava proširenje, a delimično i kapilaru. Kada se termometar unese u sredinu gde je povećana temperatura, dolazi do povećanja zapremine tečnosti, a takodje i zapremine proširenja A i kapilare B. Pošto se tečnost više širi od stakla, njen nivo će se peti u kapilari sa povećanjem temperature. Ovaj termometar, prema tome, koristi razliku u širenju tečnosti i stakla.

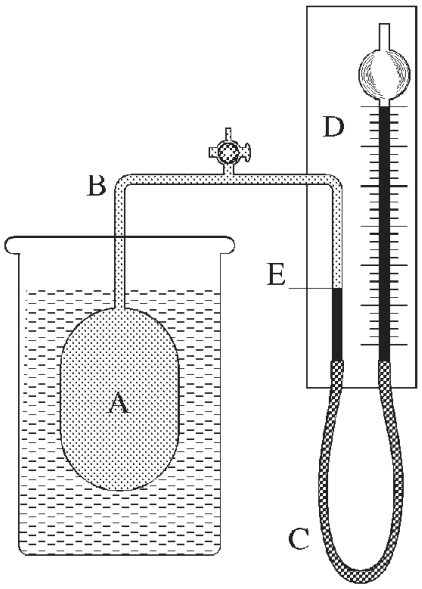
Termometrom koji koristi živu kao tečnost moguće je izmeriti temperaturu u opsegu od $-38℃$ do $+350℃$. Ako se u kapilari iznad žive nalazi azot na povišenom pritisku ili neki drugi nereaktivan gas,



Sl. 10.1: Termometar sa tečnošću

ovakvim termometrom se može meriti temperatura do +550℃, a ako se umesto stakla upotrebi kvarc, opseg se proširuje do 750℃. Za merenje temperatura nižih od −38℃ koriste se termometri punjeni alkoholom ili pentanom.

Gasni termometar se zasniva na osobinama širenja gasova pri zagrevanju. Na slici 10.2 prikazan je gasni termometar sa konstantnom zapreminom. Sud od stakla A, u kome se nalazi gas, produžava se u staklenu cev B, koja sa gumenim crevom C i cevi D predstavlja manometar u obliku slova U. Kad se temperatura gasa poveća, dolazi do njegovog širenja, što dovodi do istiskivanja žive iz cevi B i njenog potiskivanja u cev D. Podizanjem ili spuštanjem cevi D nivo žive se može dovesti do referentne tačke E. Na taj način se gas održava na konstantnoj zapremini i temperatura meri manometrom.



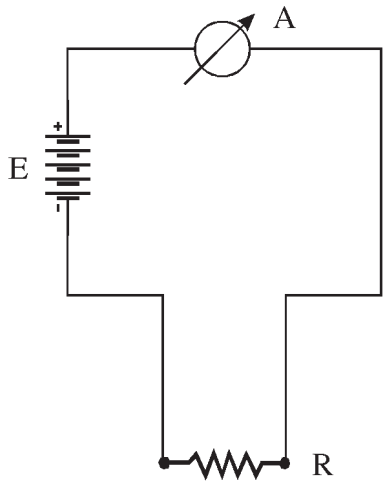
Sl. 10.2: Gasni termometar sa konstantnom zapreminom

Gornja granica merenja gasnim termometrom uslovljena je temperaturom na kojoj sud A omekšava. Donja granica je ona temperatura na kojoj se gas kondenzuje u tečnost.

Prednost gasnog termometra u odnosu na termometar sa tečnošću je u tome što se pritisak gasa sa temperaturom znatno pravilnije menja nego zapremina tečnosti. Osim toga, promena pritiska gasa se temperaturom znatnija je od promene zapremine čvrstih i tečnih tela. Zbog toga gasni termometar ima veliku pouzdanost i upotrebljava se kao standardni termometar. Nedostaci su mu što je velikih dimenzija, a merenja koja se njime vrše su prilično komplikovana.

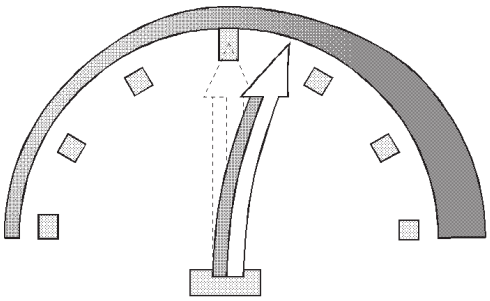
Termometar sa električnim otporom koristi osobinu da se električna otpornost metala povećava

sa temperaturom. Povećanjem otpornosti smanjuje se struja kroz metal. Na taj način se temperatura može meriti instrumentom za merenje struje. Šematski prikaz ovog termometra dat je na slici 10.3. Sastoji se od jedne tanke žice koja je namotana na okvir od liskuna i zatvorena u srebrnu zaštitnu cev sa tankim zidovima. Termometar je vezan u kolo struje sa instrumentom za merenje struje koji se postavlja na pogodno mesto za očitavanje (na primer kontrolna tabla sa instrumentima). Termometrom sa električnom otpornošću može se izmeriti temperatura sa tačnošću od $0,0001℃$. U tehnici ce ovaj termometar najčešće koristi kao standardni termometar za merenje temperature u opsegu od $-190℃$ do $+660℃$.



Sl. 10.3: Termometar sa električnim otporom

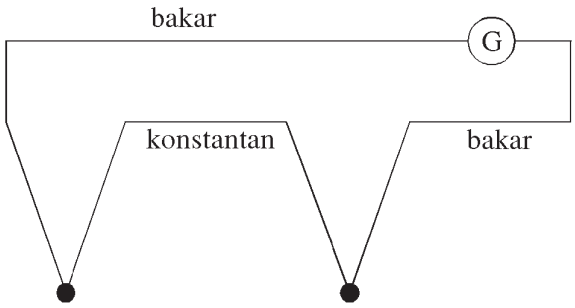
Bimetalni štap čini spoj dva različita metala (sl. 10.4). Usled različitog širenja (različitih koeficijenata linearnog širenja) metala, na povišenoj temperaturi dolazi do savijanja štapa. Štap na svom kraju ima kazaljku koja se pri tom kreće preko skale koja je prethodno izbaždarena za očitavanje temperature. Ovaj termometar ima malu tačnost i mora se često baždariti.



Sl. 10.4: Bimetalni štap

Termoelement koristi pojavu da se u strujnom kolu od dva različita metala kada oba spoja nisu na istoj temperaturi javlja razlika potencijala koja zavisi od temperaturske razlike spojeva. Šematski prikaz termoelementa dat je na slici 10.5. Jedan kraj spojeva održava se na konstantnoj temperaturi, a drugi na mestu gde je potrebno izmeriti temperaturu. Ovim termometrom se može veoma precizno izmeriti temperatura, a prednost mu je i u minijaturnosti. Naime, spojevi metala mogu imati vrlo male dimenzije, tako da se termoelementom mogu meriti temperature tela veoma malih dimenzija. Za merenje temperatura nižih od $500℃$ upotrebljavaju se termoelementi od žice bakar–konstantan ili gvoždje–konstantan, a za temperature od $500℃$ do $1600℃$ termoelement od žica platina–legura platine sa 10% rodijuma.

Pirometri služe za merenje temperature pomoću zračenja. Poznato je da zračenje zagrejanog tela veoma brzo raste sa povećanjem temperature. Kada se takvom zračenju izloži termoelement može se na osnovu intenziteta zračenja odrediti temperatura tela koje zrači. Često se koristi i optički pirometar,



Sl. 10.5: Termoelement

koji se zasniva na činjenici da je talasna dužina emitovanog zračenja, odnosno njegova boja, srazmerna temperaturi. Pošto je na nižim temperaturama zračenje neznatno, pirometrima se mere više temperature (preko 500℃).

U tehnici se koriste i kalorimetarski pirometri, čiji se rad zasniva na promeni količine toplote pri zagrevanju. Kada se zagrejano telo stavi u kalorimetar, prema količini toplote koju ono preda kalorimetru može se odrediti temperatura do koje je zagrejano.

10.3 Temperaturske skale

Pri merenju temperature potrebno je izabrati temperatursku skalu. Ove skale se formiraju na osnovu dve fiksne tačke koje je lako reprodukovati. Danas se najčešće koriste Celzijusova (Celsius) i Kelvinova (Kelvin) skala. Po Celzijusu, prva tačka je tačka topljenja leda, tačnije ravnotežna temperatura smeše čiste vode i leda na normalnom atmosferskom pritisku. Toj temperaturi pripisana je vrednost nula (0℃). Druga tačka je temperatura ključanja čiste vode, tj. ravnotežna temperatura vode koja ključa i pare na normalnom atmosferskom pritisku. Toj temperaturi je pripisano 100℃. Pošto je interval izmedju dve fiksne tačke podeljen na 100 delova, Celzijusova skala se još naziva i centrigradom. Temperature ispod 0° označavaju se negativnim brojevima.

Kelvinova ili termodinamička skala ima iste podeoke kao Celzijusova, ali je njena nulta tačka (apsolutna nula) na približno -273℃. Prema tome, kada se temperatura označava u Kelvinima (apsolutna temperatura), potrebno je na broj pročitan u Celzijusovim stepenima dodati još 273 (na primer, 20℃ iznosi $20 + 273 = 293\,K$).

U nekim zemljama koristi se i Farenhajtova (Fahrenheit) skala, kod koje tačka topljenja leda leži na 32-om, a tačka ključanja vode na 212-om podeoku. Dakle, kod Farenhajtove skale interval izmedju tačke topljenja leda i tačke ključanja vode podeljen je na 180 delova. Jedan takav deo predstavlja Farenjatov stepen (°F).

Pored ovih postoji i Reumirova (Reaumir) skala, sa podelom datog intervala na 80 delova, ali se ona veoma retko upotrebljava. U našoj zemlji dozvoljena je upotreba samo Celzijusove i Kelvinove skale.

10.4 Širenje čvrstih i tečnih tela pri zagrevanju

Većina tela pri zagrevanju se širi podjednako u svim pravcima. Medjutim, ako je dužina tela znatno veća od ostale dve dimenzije, kao kod štapa, takvo širenje se naziva *linearno širenje*. Eksperimentalno je pokazano da izduženje štapa Δl zavisi od njegove prvobitne dužine i promene temperature na sledeći način

$$\Delta l = \alpha l_o \Delta t, \tag{10.1}$$

gde je l_o dužina štapa na temperaturi t_o, $l = l_o + \Delta l$ dužina štapa na temperaturi t ($\Delta t = t - t_o$) i α termički koeficijent linearnog širenja. Ako se pretpostavi da je $t_o = 0$℃, gornji izraz dobija oblik

$$l = l_o(1 + \alpha t), \tag{10.2}$$

ili

$$\alpha = \frac{l - l_o}{l_o t} = \frac{\Delta l}{l_o t}. \tag{10.3}$$

Dakle, termički koeficijent linearnog širenja jednak je relativnom izduženju tela pri njegovom zagrevanju za $1\,K$ ili 1℃. Termički koeficijent linearnog širenja za čvrsta tela je reda veličine 10^{-5} do $10^{-6}\,K^{-1}$.

Kao rezultat linearnog širenja dolazi do povećanja zapremine tela. Posmatraće se telo oblika kocke stranice l_o na temperaturi t_o. Njegova zapremina na ovoj temperaturi je $V_o = l_o^3$. Posle zagrevanja do temperature t stranica će imati dužinu $l_o(1 + \alpha t)$, a telo zapreminu

$$V = [l_o(1 + \alpha t)]^3 = l_o^3\,(1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3). \tag{10.4}$$

Pošto α za čvrsta tela ima malu vrednost, članovi koji sadrže α^2 i α^3 mogu se zanemariti, pa izraz (10.4) dobija oblik

$$V = V_o(1 + \gamma t), \tag{10.5}$$

gde je $\gamma = 3\alpha$ termički koeficijent zapreminskog širenja čvrstih tela. Očigledno je da je red veličine γ isti kao α. Zamenom gustine tela $\varrho = m/V$ u izraz (10.5) dobija se

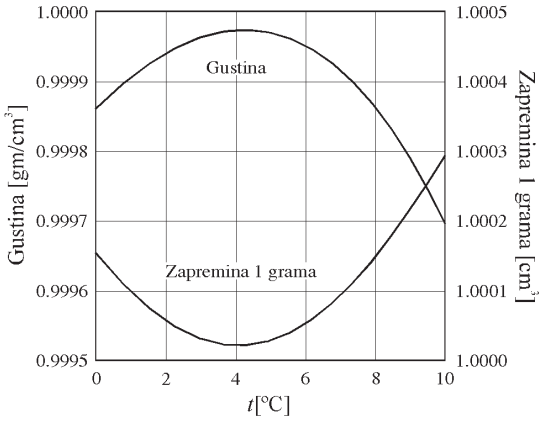
$$\varrho = \frac{\varrho_o}{1 + \gamma t}, \tag{10.6}$$

gde je $\varrho_o = m/V_o$ gustina tela na temperaturi $t = 0$℃, a ϱ gustina na temperaturi t. Kao što se iz poslednjeg izraza vidi, gustina tela opada sa temperaturom.

Izrazi (10.5) i (10.6) važe i za tečnosti, ali je termički koeficijent zapreminskog širenja kod tečnih tela veći nego kod čvrstih i iznosi od 10^{-3} do $10^{-4}\,K^{-1}$.

Ako u čvrstom telu postoji šupljina, njena zapremina se povećava na isti način kao da je puno telo. Tako se, na primer, zapremina koju ima staklena cev sa tankim zidovima ili proširenje kod termometarskog suda sa povećanjem temperature povećava na isti način kao da se radi o valjku ili kugli.

Kod vode se sa povećanjem temperature uočava anomalija. Naime, pri zagrevanju od 0℃ do 4℃, dolazi do smanjenja njene zapremine. To znači da je termički koeficijent zapreminskog širenja u ovom intervalu negativan. Pri temperaturama iznad 4℃ zapremina vode se povećava pri zagrevanju, kao i kod ostalih tela. Pošto je zapremina date mase najmanja na temperaturi od 4℃, gustina vode na ovoj temperaturi je najveća. To je razlog što se jezera i reke lede na površini, a ne u dubini. Na slici 10.6 prikazana je zavisnost zapremine vode od temperature u opsegu od 0℃ do 10℃.



Sl. 10.6: Gustina i zapremina jednog grama vode u temperaturskoj oblasti od 0℃ do 10℃

10.5 Termičko naprezanje materijala

Iz iskustva je poznato da ako se na bilo koji način spreči termičko širenje nekog tela, dolazi do njegovog termičkog naprezanja, tj. pojavljuju se naponi istezanja ili sabijanja (tzv. *toplotni naponi.*) Ova naprezanja mogu postati veoma velika, tako da u telu predju granicu elastičnosti ili čak dovedu do njegovog kidanja. Da ne bi došlo do ovakvih naprezanja, u tehničkim objektima se preduzimaju posebne mere. Tako su, na primer, gvozdeni mostovi samo na jednom kraju pričvršćeni za temelj, dok na drugi kraj leži na pokretnim ležištima. Kod dugačkih cevi kroz koje struji vodena para uticaj termičkog naprezanja smanjuje se umetanjem ekspanzionih zglobova ili delova cevi u obliku slova U.

Termičko naprezanje u štapu koji može da se širi ili skuplja može se izračunati na relativno jednostavan način. Neka se krajevi štapa dužine l nalaze izmedju dva fiksna oslonca koji onemogućavaju njegovo širenje ili skupljanje. Na temperaturi t_2 štap se nalazi u nenapregnutom stanju. Ako se štap ohladi do temperature t_1, zbog nemogućnosti njegovog skupljanja doći će do termičkog naprezanja. Kada bi štap mogao da se skuplja, promena njegove dužine bila bi

$$\Delta l = \alpha l \Delta t, \tag{10.7}$$

ali kako to nije moguće, istezanje mora da se poveća za iznos dovoljan da bi se proizvela ista promena dužine. Iz Hukovog zakona (izraz (8.4)) se sila istezanja može izraziti na sledeći način:

$$F = SE_y \frac{\Delta l}{l}. \tag{10.8}$$

Zamenom Δl iz (10.7) u (10.8) za ovu silu se dobija

$$F = SE_y \alpha \Delta t, \tag{10.9}$$

ili

$$\frac{F}{S} = E_y \alpha \Delta t. \tag{10.10}$$

Odnos F/S predstavlja normalni napon koji odgovara termičkom naprezanju.

Ovde je razmatran samo slučaj termičkog naprezanja kod linearnog širenja. U telima se javljaju složena naprezanja u svim pravcima. U materijalima mogu nastati razne vrste naprezanja kao posledica hladjenja posle raznih termičkih procesa proizvodnje. Kvalitet i izdržljivost materijala se znatno smanjuju kada postoje ovakva naprezanja.

10.6 Zakoni idealnih gasova

Pri proučavanju gasova uglavnom se koristi model idealnog gasa, pa se i zakoni o kojima će biti govora odnose na tu aproksimaciju. Kod idealnog gasa smatra se da je zapremina molekula zanemarljiva u odnosu na zapreminu suda u kome se gas nalazi. Sem toga, dejstvo medjumolekularnih sila se zanemaruje, a sudar izmedju molekula gasa i zidova suda smatra savršeno elastičnim. Realni gasovi se približavaju idealnom ukoliko se nalaze na što nižem pritisku i višoj temperaturi. Neki realni gasovi (vodonik, helijum i sl.) se čak i pri normalnim ulovima ($p_a = 1,01 \cdot 10^5\, Pa$ i 0℃) ponašaju slično idealnom gasu.

Ponašanje idealnih gasova se može opisati pomoću nekoliko zakona. To su Bojl-Mariotov (Boyle-Mariotte), Gei-Lisakov (Gay-Lussac), Šarlov (Charles), Avogadrov (Avogadro) i Daltonov (Dalton) zakon.

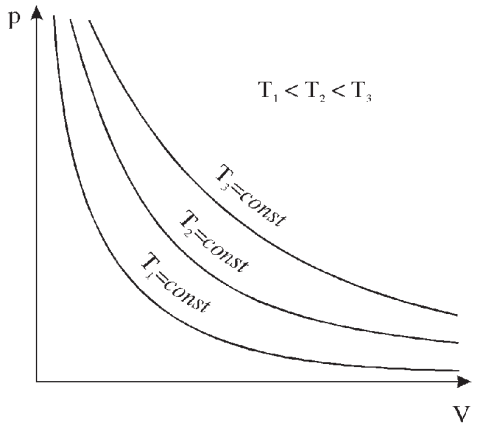
10.6.1 Bojl-Mariotov zakon

Bojl i Mariot su nezavisno jedan od drugog ustanovili da se pritisak gasa menja obrnuto proporcionalno zapremini, ako se temperatura odredjene količine gasa drži konstantnom. Matematički se ovaj zakon može izraziti

$$pV = const. \qquad (T = const., m = const.) \tag{10.11}$$

Bojl-Mariotov zakon glasi:
Pri konstantnoj temperaturi zapremina date količine gasa obrnuto je srazmerna pritisku, ili **proizvod pritiska i zapremine odredjene količine gasa pri stalnoj temperaturi je konstantan**.

Izraz (10.11) u $p-V$ dijagramu predstavlja jednakostranu hiperbolu koja se naziva *izoterma*. Na slici 10.7 prikazana je familija izotermi za različite temperature.



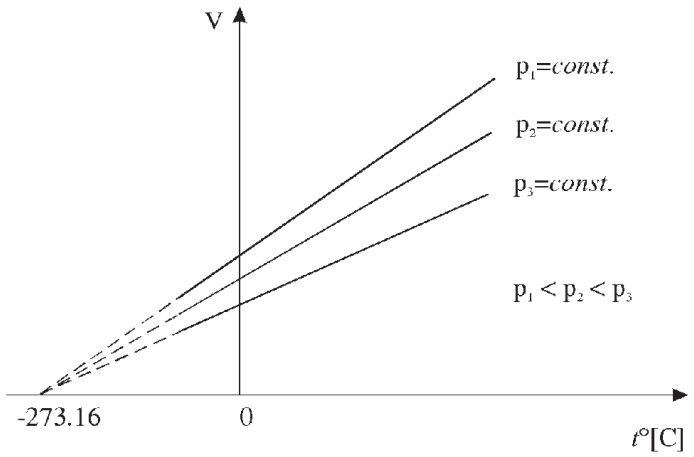
Sl. 10.7: Izoterme idealnog gasa

10.6.2 Gej-Lisakov zakon

Poznato je da se pri zagrevanju gasovi znatno više šire nego čvrsta tela. Medjutim, gasovi mogu lako da menjaju svoju zapreminu i bez promene temperature. Zato se njihovo termičko širenje može jednostavno posmatrati ako se datoj količini gasa održava stalan pritisak. U ovom slučaju zapremina gasa se linearno menja sa temperaturom po Gej-Lisakovom zakonu

$$V = V_o(1 + \gamma t), \qquad (p = const.) \tag{10.12}$$

gde je V_o zapremina gasa na 0℃, V zapremina na t℃, a γ termički koeficijent zapreminskog širenja gasa, koji za sve gasove iznosi približno $1/273\,K^{-1}$. Termički koeficijent zapreminskog širenja ne zavisi od temperature, a kod malih pritisaka praktično ni od pritiska. Proces širenja gasa pri konstantnom pritisku naziva se izobarnim. U $V-t$ dijagramu ovaj proces je prikazan pravom koja se naziva **izobara** (sl. 10.8).



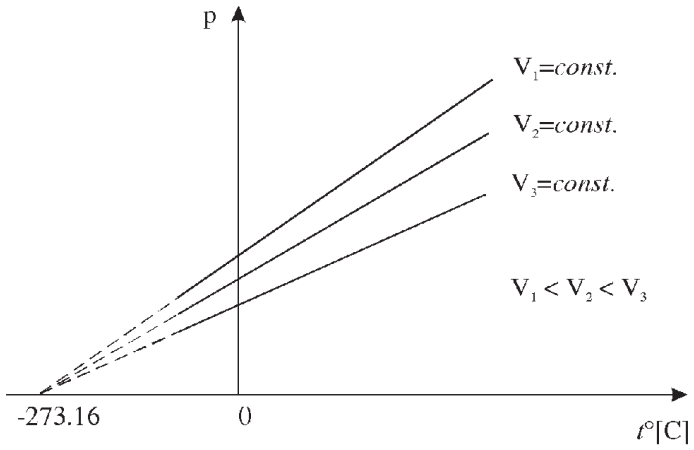
Sl. 10.8: Izobare idealnog gasa

10.6.3 Šarlov zakon

Gas se može zagrevati i tako da se njegova zapremina održava konstantnom. U ovom slučaju pritisak gasa se linearno menja sa temperaturom po Šarlovom zakonu

$$p = p_o(1 + \gamma_1 t), \qquad (V = const.) \tag{10.13}$$

gde je p_o pritisak gasa na 0℃, p pritisak na t℃ i γ_1 koeficijent promene pritiska, koji je za idealne gasove jednak termičkom koeficijentu zapreminskog širenja ($\gamma_1 = \gamma \approx 1/273\,K^{-1}$.) U $p-t$ dijagramu ovaj proces je prikazan pravom koja se naziva *izohora* (sl. 10.9).



Sl. 10.9: Izohore idealnog gasa

Iz izraza (10.12) i (10.13) proizilazi da izobare i izohore seku t-osu u tački $t \approx -273$℃. Ako se početak koordinatnog sistema pomeri u ovu tačku, dolazi se do Kelvinove ili termodinamičke skale, pri čemu je veza izmedju temperature izražene u Kelvinima i Celzijusovim stepenima data relacijom

$$T(K) = t(℃) + 273. \tag{10.14}$$

Dakle, $0\,K = -273$℃.

Iz izraza (10.12) sledi da je pri temperaturi $0\,K$

$$V = V_o\left(1 + \frac{-273}{273}\right) = 0,$$

tj. da pri temperaturi $0\,K$ zapremina gasa postaje jednaka nuli, što ne odgovara stvarnosti. Ovo pokazuje da u oblasti niskih temperatura zakoni idealnih gasova nisu primenljivi. Pri niskim temperaturama materijal ne može postojati u gasovitom stanju, već prelazi u tečno ili, najčešće, čvrsto stanje.

Izraz (10.12) se pomoću termodinamičke temperature može prikazati u jednostavnijem obliku

$$V = V_o(1 + \gamma t) = V_o\left(1 + \frac{t}{273}\right) = V_o\frac{273 + t}{273} = V_o\frac{T}{T_o}, \tag{10.15}$$

gde $T_o = 273\,K$ odgovara 0℃. Gornji izraz se može napisati u obliku

$$\frac{V}{V_o} = \frac{T}{T_o}, \qquad (p = const.) \tag{10.16}$$

Pri konstantnom pritisku zapremina gasa proporcionalna je termodinamičkoj temperaturi (definicija Gej-Lisakovog zakona).

Analognom transformaciom izraza (10.13) dobija se

$$\frac{p}{p_o} = \frac{T}{T_o}, \qquad (V = const.) \tag{10.17}$$

Pri konstantnoj zapremini pritisak gasa proporcionalan je termodinamičkoj temperaturi (definicija Šarlovog zakona).

10.6.4 Avogadrov zakon

Avogadro je na osnovu eksperimenata sa različitim gasovima došao do sledećeg zakona:
U jednakim zapreminama idealnih gasova, na istoj temperaturi i istom pritisku, nalazi se isti broj molekula (atoma).

Mol bilo kojeg gasa pri istoj temperaturi i pritisku zauzima istu zapreminu. Pri normalnim uslovima ta zapremina iznosi $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}\, m^3$ i naziva se molarna zapremina. U molu ma kojeg gasa nalazi se isti broj molekula (atoma). Taj broj naziva se Avogadrov broj N_a. Postoji više metoda za odredjivanje Avogadrovog broja, a medju najtačnije spada metoda zasnovana na Faradejevom (Faraday) zakonu elektrolize koja daje

$$N_a = \frac{F}{e}, \tag{10.18}$$

gde je $F = 96500\, C mol^{-1}$ faradej, a $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ elementarno naelektrisanje. Zamenom ovih vrednosti u (10.18) dobija se

$$N_a = 6,02 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}.$$

Treba istaći da se Avogadrov zakon može primeniti i na realne gasove koji se približno ponašaju kao idealni.

10.6.5 Daltonov zakon

Daltonov zakon se može iskazati na sledeći način:
U smeši gasova koji medjusobno ne reaguju hemijski, svaki gas deluje sopstvenim pritiskom nezavisno, kao da drugi gasovi nisu prisutni.

Ako se pretpostavi da je u jednom sudu jedan gas pod pritiskom p_1 i ako se doda drugi gas koji bi, da je sam u istom sudu, imao pritisak p_2, ukupni pritisak u sudu biće

$$p = p_1 + p_2, \tag{10.19}$$

ili uopšte

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n. \tag{10.20}$$

Prema tome, Daltonov zakon se može formulisati i na sledeći način:
Ukupni pritisak u sudu jednak je zbiru parcijalnih pritisaka prisutnih gasova.

Daltonov zakon, pored toga što važi za idealne i realne gasove, važi i za pare, za koje ne važe Bojl-Mariotov i Gej-Lisakov zakon.

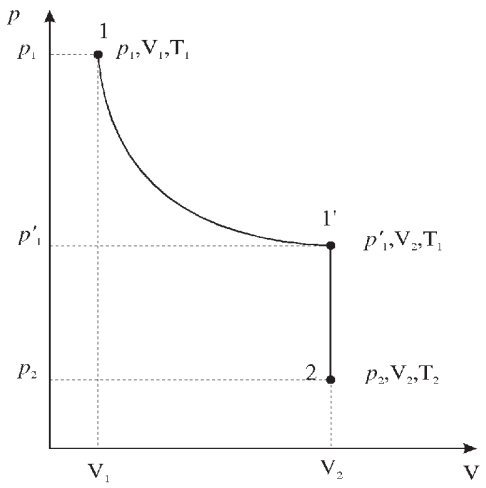
10.7 Jednačina stanja idealnog gasa

Bojl-Mariotov i Gej-Lisakov zakon povezuju osnovne parametre gasa odredjene mase: pritisak p, zapreminu V i temperaturu T. Medjutim, te veličine su povezane u parovima, pri čemu je uvek jedna od njih konstantna. Klapejron (Clapeyron) je, objedinivši Bojl-Mariotov i Šarlov zakon (ili Gej-Lisakov zakon), došao do jednačine stanja idealnog gasa, koja odjednom povezuje sve tri veličine. Neka odredjena masa gasa na temperaturi T_1 i pritisku p_1 zauzima zapreminu V_1. Ova masa gasa u nekom drugom proizvoljnom stanju karakteriše se parametrima p_2, V_2, T_2 (sl. 10.10). Prelaz iz stanja 1 u stanje 2 ostvaruje se u vidu dva procesa: izotermskog (izoterma $1 - 1'$) i izohorskog (izohora $1' - 2$). U saglasnosti sa Bojl-Mariotovim (10.11) i Šarlovim zakonom (10.13) može se napisati

$$p_1 V_1 = p_1' V_2 \tag{10.21}$$

i

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{10.22}$$



Sl. 10.10: Uz izvodjenje jednačine stanja idealnog gasa

Eliminisanjem p_1' iz izraza (10.21) i (10.22) dobija se

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \tag{10.23}$$

Pošto su stanja 1 i 2 bila proizvoljno odabrana, može se zaključiti da za datu masu gasa veličina pV/T ostaje konstantna, tj.

$$\frac{pV}{T} = B = const. \tag{10.24}$$

Izraz (10.24) predstavlja Klapejronovu jednačinu. Konstanta B u ovoj jednačini zavisi od vrste gasa i naziva se gasna konstanta.

Mendeljejev je objedinio Klapejronovu jednačinu sa Avogadrovim zakonom primenivši izraz (10.24) za jedan mol gasa. Prema Avogadrovom zakonu, pri istom pritisku i temperaturi mol bilo kojeg gasa zauzima zapreminu $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}\, m^3$, pa je konstanta B ista za sve gasove. Ta konstanta obeležava se sa R i naziva *univerzalna gasna konstanta* (ponekad i molarna gasna konstanta). Izraz

$$pV_m = RT \tag{10.25}$$

važi samo za idealni gas i naziva se jednačina stanja idealnog gasa ili Klapejron-Mendeljejeva jednačina.

Brojna vrednost univerzalne gasne konstante odredjuje se iz izraza (10.25). Kada se pretpostavi da se mol gasa nalazi pod normalnim uslovima ($p_a = 1,01 \cdot 10^5\, Pa,\ T_o = 273,16\, K,\ V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}\, m^3$), dobija se $R = 8,31\, Jmol^{-1}K^{-1}$.

Od jednačine (10.25) za jedan mol gasa može se preći na jednačinu stanja idealnog gasa za bilo koju masu gasa. Ako pri datom pritisku i temperaturi jedan mol gasa zauzima zapreminu V_m, pri istim uslovima masa m gasa zauzimaće zapreminu $V = mV_m/M$, gde je M molarna masa. Ova veličina jednaka je količniku mase m gasa i broja molova n koji su u njoj sadržani. Jedinica za molarnu masu je $kg\, mol^{-1}$. Jednačina stanja idealnog gasa za masu m gasa može se sada izraziti u obliku

$$pV = \frac{m}{M}RT = nRT. \tag{10.26}$$

Često se u jednačini stanja idealnog gasa umesto univerzalne gasne konstante primenjuje Bolcmanova konstanta $k = R/N_a = 1,38 \cdot 10^{-23}\, JK^{-1}$. U tom slučaju se izraz (10.25) može napisati kao

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_aT}{V_m} = kn_oT, \tag{10.27}$$

gde je $N_a/V_m = n_o$ broj molekula u jedinici zapremine. Iz izraza (10.27) proizilazi da je pritisak idealnog gasa pri datoj temperaturi proporcionalan broju (koncentraciji) molekula gasa. Pri istoj temperaturi i pritisku svi gasovi sadrže u jedinici zapremine isti broj molekula. Broj molekula koji sadrži $1\, m^3$ gasa pri normalnim uslovima naziva se Lošmitova konstanta N_L ($N_L = p_a/kT_o = 2,68 \cdot 10^{25}\, m^{-3}$).

10.8 Količina toplote. Specifični toplotni kapacitet

10.8.1 Toplota kao oblik energije

Prilikom razmatranja Zakona održanja mehaničke energije naglašeno je da ukupna mehanička energija u jednom zatvorenom sistemu ostaje konstantna. Naime, deo kinetičke energije može preći u potencijalnu i obrnuto, ali njihov zbir u bilo kom trenutku ostaje nepromenjen. Ovde će ovaj zakon biti primenjen na toplotne pojave. U tom cilju posmatraće se jedan relativno jednostavan primer. Neka se telo kome je saopštena odredjena početna brzina kreće po nekoj podlozi. Njegova brzina će se postepeno smanjivati usled trenja izmedju tela i podloge. Pri tome se zapaža da se i telo i podloga zagrevaju. Ukoliko se telo kreće po horizontalnoj podlozi, njegova gravitaciona potencijalna energija se ne menja, ali dolazi do smanjenja kinetičke energije. Kaže se da je izgubljeni deo kinetičke energije tela predat telu i podlozi, što je praćeno promenom (povećanjem) njihove temperature. Prema tome, može se zaključiti da je toplota samo jedan vid energije. Povećanjem temperature povećava se unutrašnja energija tela, koja predstavlja zbir kinetičke i potencijalne energije molekula sistema u termodinamičkoj ravnoteži. Temperatura tela, dakle, može da se poveća na račun smanjenja kinetičke energije tela. Pri tome je povećanje toplotne energije jednako gubitku kinetičke, odnosno potencijalne energije.

Temperatura tela, a samim tim i unutrašnja energija, može se povećati i na račun hladjenja drugog tela. Tako se, na primer, temperatura vazduha u zatvorenoj prostoriji povećava na račun smanjenja temperature peći. Kod ovog procesa dolazi do prenosa toplotne energije sa jednog tela na drugo, a da se ona ne kreću.

Pod prenosom toplote u najširem smislu reči podrazumeva se proces pri kome se unutrašnja energija jedne grupe tela smanjuje, a druge grupe tela povećava, pri čemu se mehanička energija tela uopšte ne menja.

Postoje i procesi pri kojima dolazi do predaje toplote medju telima, a da pri tome nema promene temperature. Takav je slučaj, na primer, kod smeše vode i leda. Naime, smeša vode i leda ima temperaturu 0℃ sve dok se led ne otopi. To znači da procesi predaje toplote ne zavise od temperature tela, već se karakterišu predatom količinom toplote. Ovo je još jedan od dokaza da je toplota zaista jedan vid energije. Prema tome, jedinica za toplotu je ista kao za rad: *džul* (J).

10.8.2 Specifični toplotni kapacitet. Kalorimetrija

Toplotni kapacitet tela C_t definiše se kao odnos primljene količine toplote Q i povećanja temperature Δt

$$C_t = \frac{Q}{\Delta t}. \tag{10.28}$$

Toplotni kapacitet zavisi od mase tela i vrste materijala, a takodje i od temperature tela. Jedinica za toplotni kapacitet je $J(^\circ C)^{-1}$ ili JK^{-1}.

Da bi se dobila veličina koja karakteriše odredjeni materijal, a ne zavisi od mase tela, definiše se *specifični toplotni kapacitet* c (specifična toplota). On predstavlja odnos toplotnog kapaciteta i mase tela

$$c = \frac{C_t}{m} = \frac{Q}{m\Delta t}. \tag{10.29}$$

Jedinica za specifični toplotni kapacitet je $Jkg^{-1}K^{-1}$.

Pošto je specifični toplotni kapacitet funkcija temperature, izraz (10.29) treba prikazati u diferencijalnom obliku

$$c = \frac{dQ}{mdt}. \tag{10.30}$$

Iz gornjeg izraza se može izračunati količina toplote koja se dovodi telu ili odvodi od tela

$$Q = m\int_{t_1}^{t_2} cdt, \tag{10.31}$$

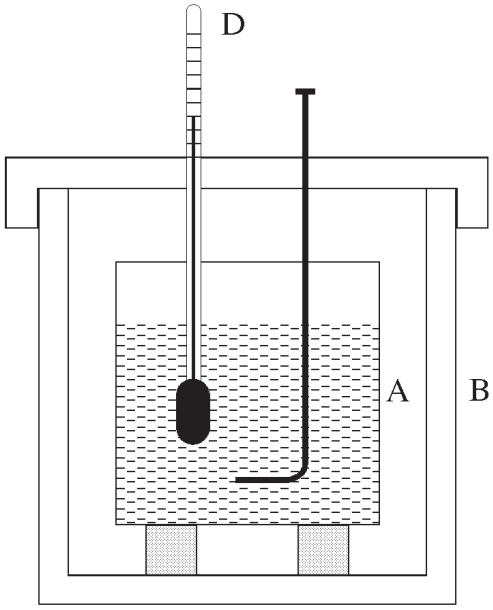
gde je $c{=}c(t)$ funkcija temperature.

Često se definiše specifični toplotni kapacitet po jednom molu, tzv. molarni specifični toplotni kapacitet C. To je količina toplote potrebna da se jednom molu materijala povisi temperatura za 1℃ ili $1K$. On se može izraziti kao

$$C = cM, \tag{10.32}$$

gde je M molarna masa materijala. Dilon (Dulong) i Peti (Petit) su uočili da izmedju specifičnog toplotnog kapaciteta i atomske mase metala postoji jednostavna zavisnost, koja se naziva Dilon-Petijevo pravilo. Ono glasi:
Proizvod specifičnog toplotnog kapaciteta metala i njegove atomske mase iznosi približno $25\,kJmol^{-1}K^{-1}$.

Kasnije je ustanovljeno da ovo pravilo važi za skoro sva čvrsta tela. Korišćenjem izraza (10.32) Dilon-Petijevo pravilo se može iskazati i na sledeći način:
Molarni specifični toplotni kapacitet bilo kojeg čvrstog tela iznosi približno $25\,kJmol^{-1}K^{-1}$.



Sl. 10.11: Ričmanov kalorimetar

Za eksperimentalno odredjivanje specifičnog toplotnog kapaciteta materijala koristi se Ričmanov (Richmann) kalorimetar (sl. 10.11). On se sastoji od suda A, koji je termički izolovan tako što je stavljen u veći sud B, pri čemu se izmedju ova dva suda nalazi vazduh. U sudu A nalazi se voda mase m i temperature t_1, koja se meri termometrom D. U vodu se potopi telo mase m_1, čiji specifični toplotni kapacitet treba odrediti. Neka to telo ima temperaturu t_2, koja je veća od t_1. Telo je predalo količinu toplote vodi

$$Q = m_1 c_1 (t_2 - t_s), \tag{10.33}$$

gde je c_1 specifični toplotni kapacitet tela, a t_s temperatura vode u kalorimetru posle uspostavljanja termičke ravnoteže. Kako je prelaz toplote izvršen u toplotno izolovanom sudu (nema razmene toplote sa okolinom), celokupnu toplotu koju je odalo telo primila je voda. Ta količina toplote je

$$Q = mc(t_s - t_1), \tag{10.34}$$

gde je c specifični toplotni kapacitet vode. Iz izraza (10.33) i (10.34) sledi

$$m_1 c_1 (t_2 - t_s) = mc(t_s - t_1), \tag{10.35}$$

odakle se za specifični toplotni kapacitet tela dobija

$$c_1 = \frac{mc(t_s - t_1)}{m_1(t_2 - t_s)}. \tag{10.36}$$

Kada se zahtevaju preciznija merenja, mora se uzeti u obzir i zagrevanje samog kalorimetra, a ne samo vode. Ako je, na primer, m_k masa kalorimetarskog suda, a c_k specifični toplotni kapacitet materijala od kojeg je sud napravljen, korigovana jednačina za toplotnu ravnotežu može se napisati u obliku

$$m_1c_1(t_2 - t_s) = mc(t_s - t_1) + m_kc_k(t_s - t_1). \tag{10.37}$$

Treba naglasiti da se na sličan način može odrediti specifični toplotni kapacitet tečnih tela.

10.9 Prenošenje toplote

Toplota se može prenositi na tri načina: *provodjenjem* (kondukcijom), *strujanjem* (konvekcijom) i *zračenjem* (radijacijom). U praksi se to prenošenje često vrši kombinacijom ova tri načina, što zavisi od osobina sistema kroz koji se toplota prenosi.

10.9.1 Provodjenje

Ako su dva dela jednog čvrstog tela na različitim temperaturama, onda se kroz to telo toplota prenosi provodjenjem sa mesta više na mesto niže temperature. Ovaj oblik prenošenja toplote uglavnom je uslovljen atomima, koji svoje vibracije prenose susednim atomima. Kod metala se prenošenje toplote vrši pomoću slobodnih elektrona.

Količina toplote koja se prenese provodjenjem data je tzv. Furijeovim (Fourier) zakonom

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda S\frac{dt}{dx}, \tag{10.38}$$

gde je $dQ/d\tau$ trenutna brzina prenošenja toplote, λ koeficijent toplotne provodljivosti, S površina normalna na pravac prostiranja toplote i dt/dx temperaturni gradijent. Znak (–) označava da se toplota prenosi u smeru opadanja temperature.

U stacionarnom režimu provodjenja toplote temperatura je u svakoj tački konstantna, pa ni gradijent dt/dx, ni brzina prenošenja toplote ne zavise od vremena, što daje $dQ/d\tau = Q/\tau$. Zato se izraz (10.38) može napisati u obliku

$$\frac{Q}{\tau} = -\lambda S\frac{dt}{dx}. \tag{10.39}$$

Prema vrednosti koeficijenta toplotne provodljivosti, materijali se mogu podeliti na toplotne provodnike i toplotne izolatore. Kao kod podele prema električnoj provodnosti, i ovde izmedju navedene dve grupe nema oštre granice. Iako po pravilu materijali koji su dobri električni provodnici dobro provode i toplotu, postoje i izuzeci. Tako, na primer, aluminijumoksid Al_2O_3, dobar električni izolator, relativno dobro provodi toplotu.

Ako se u stacionarnom režimu posmatra provodjenje toplote kroz neku ploču debljine d (sl. 10.12), može se napisati da je

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\Delta t}{d},$$

gde je $\Delta t = t_2 - t_1$ razlika temperatura na suprotnim površinama S zida ploče. Tako se dobija

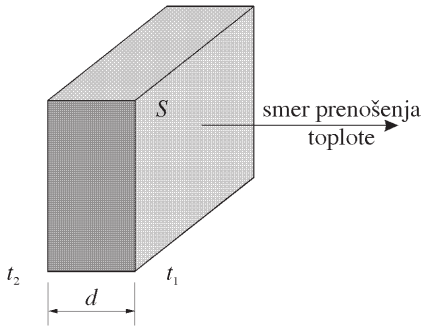
$$\frac{Q}{\tau} = \lambda S\frac{\Delta t}{d}. \tag{10.40}$$

Izraz (10.40) se može napisati u obliku

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{\Delta t}{d/\lambda S} = \frac{\Delta t}{R}, \tag{10.41}$$

pogodnom za uspostavljanje analogije sa Omovim (Ohm) zakonom. Dakle,

$$struja = \frac{napon}{otpor}. \tag{10.42}$$



Sl. 10.12: Uz objašnjenje prenošenja toplote provodjenjem

U izrazu (10.41) Q/τ je analogno struji, Δt naponu, a $R=d/\lambda S$ otporu.

Ako je ploča kroz koju se prenosi toplota sastavljena od slojeva različitih materijala, različitih debljina, izraz (10.41) se može napisati u obliku

$$\frac{Q}{\tau} = \frac{S\Delta t}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i}}. \tag{10.43}$$

10.9.2 Strujanje

Prenošenje toplote strujanjem karakteristično je za fluide. To se može zapaziti na primeru čvrstog tela koje je okruženo fluidom. Kada je temperatura tela različita od temperature fluida, medju njima dolazi do razmene toplote. Ako je temperatura tela veća od temperature fluda koji ga okružuje, fluid se zagreva. To dovodi do smanjenja gustine fluida i on struji naviše. U obrnutom slučaju se fluid hladi i zbog povećanja njegove gustine blizu tela struji naniže. U oba slučaja radi se o prostiranju toplote zahvaljujući strujanju fluida ili konvekciji. Ovakva vrsta strujanja poznata je kao *prirodno* strujanje. Pored prirodnog postoji i *prinudno* strujanje, pri kojem se fluid prisilno kreće. Takav slučaj nastaje, na primer, kod centralnog grejanja kada se pomoću pumpe topla voda prisiljava da struji kroz cevi, zagrevajući radijatore koji predaju toplotu okolnom vazduhu.

Količina toplote koja se strujanjem prenese sa nekog čvrstog tela na okolni fluid data je Njutnovom jednačinom

$$q_c = \frac{dQ}{d\tau} = hS(t_t - t_f), \tag{10.44}$$

gde je q_c brzina prenošenja toplote, h koeficijent prelaza toplote sa površine tela na fluid, S površina tela, t_t temperatura površine tela i t_f temperatura mase fluida na koji je preneta toplota. Vrednost koeficijenta prelaza toplote u velikoj meri zavisi od oblika i položaja zida, temperature i dr. i obično se odredjuje eksperimentalno.

10.9.3 Zračenje

Prenošenje toplote zračenjem vrši se posredstvom elektromagnetnih talasa koje zrače zagrejana tela. Talasna dužina emitovanog zračenja zavisi od temperature na kojoj se telo nalazi. Sa povećanjem temperature tela talasna dužina emitovanog zračenja se smanjuje. Pri zagrevanju tela toplota najpre prelazi u energiju zračenja, koja se na drugom telu apsorbuje i ponovo prelazi u toplotu.

Prenos toplote sa nekog tela na okolinu provodjenjem i strujanjem zavisi od razlike temperature tela i okoline. Zračenje tela zavisi samo od njegove temperature. To znači da iznad neke temperature zračenje postaje dominantan proces u odnosu na provodjenje i strujanje.

Zavisnost izračene toplotne energije od temperature tela data je Štefan (Stefan) Bolcmanovim zakonom

$$E = e\sigma T^4, \tag{10.45}$$

gde je E emisiona snaga (moć), tj. toplotna energija koja se emituje sa jedinice površine tela u jedinici vremena, σ konstanta proporcionalnosti (Štefan-Bolcmanova konstanta) čija je vrednost $5,7 \cdot 10^8\, Wm^{-2}K^{-4}$,

a e konstanta poznata pod nazivom emitivnost tela, koja u zavisnosti od strukture njegove površine može imati vrednosti izmedju 0 i 1. Emitivnost svih tela je, po pravilu, manja od jedinice i utoliko je manja, ukoliko je površina tela bolje uglačana. Emitivnost začadjene crne kugle je bliska jedinici. Emitivnost jednaku jedinici trebalo bi da ima apsolutno crno telo.

Na kraju treba naglasiti da je prenošenje toplote zračenjem vezano sa zakonima zračenja koji su razmatrani u drugoj knjizi istog autora (Opšti kurs fizike—oscilacije, talasi i optika).

11. Osnovi termodinamike

11.1 Osnovne karakteristike

Termodinamika je deo fizike koji proučava pojave vezane za pretvaranje toplotne u druge oblike energije (mehaničku, električnu, hemijsku, itd.), i obrnuto. Termodinamika takodje proučava uslove pod kojima se toplotna energija pretvara u mehanički rad. Pretvaranje jednog oblika energije u drugi uvek je vezano za neki *termodinamički sistem* (radno telo). Pod termodinamičkim sistemom se podrazumeva odredjena količina nekog materijala koja se nalazi u unutrašnjosti neke zatvorene površine. Jedan od najjednostavnijih takvih sistema je idealni gas u cilindru sa pokretnim klipom. U ravnotežnom stanju u svim tačkama tog sistema vlada isti pritisak i temperatura, pa se može primeniti jednačina stanja idealnog gasa.

U termodinamici se proučavaju svojstva makroskopskih sistema ne vodeći računa o njegovoj mikrostrukturi. Koriste se, dakle, makroskopske veličine (pritisak, zapremina, temperatura, unutrašnja energija, itd.), koje odredjuju stanje termodinamičkog sistema.

Pod termodinamičkim procesom se podrazumeva promena stanja nekog sistema. Posebnu ulogu imaju kružni procesi, u kojima se sistem posle niza promena vraća u početno stanje. Toplotne mašine upravo ponavljaju odredjeni termodinamički kružni proces, pretvarajući toplotnu energiju u mehanički rad.

Termodinamički procesi mogu biti *reverzibilni* (povratni) i *ireverzibilni* (nepovratni). Proces je reverzibilan ako sistem prolazi kroz niz ravnotežnih stanja, u protivnom se kaže se da je ireverzibilan. Idealni reverzibilni proces u prirodi ne postoji, realni termodinamički procesi su uvek manje ili više ireverzibilni. Medjutim, teorijski je moguće obraditi samo reverzibilne procese. Iz tako dobijenih rezultata mogu se izvesti pojedini zaključci o ponašanju realnih procesa.

11.2 Unutrašnja energija. Stepen slobode

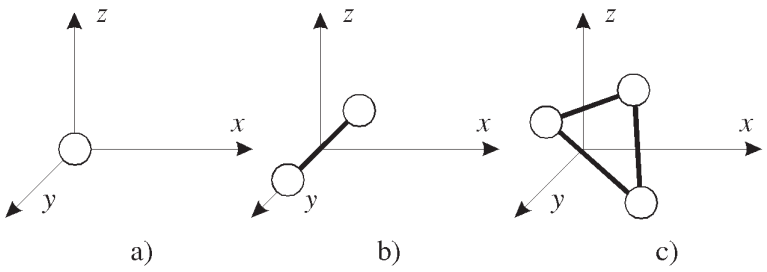
Unutrašnja energija je važna karakteristika termodinamičkog sistema. Ona predstavlja zbir energije haotičnog (toplotnog) kretanja mikročestica sistema (molekula, atoma, elektrona, jezgara, itd.) i energije njihovog medjusobnog dejstva. Dakle, unutrašnja energija se ne odnosi na kinetičku energiju kretanja sistema kao celine i potencijalnu enegiju sistema u spoljašnjem polju. Kod idealnog gasa se zanemaruje dejstvo medjumolekularnih sila, pa je njegova unutrašnja energija jednaka kinetičkoj energiji svih molekula.

Unutrašnja energija je jednoznačna funkcija sistema, tj. u bilo kom stanju sistem ima odredjenu unutrašnju energiju. Stanje sistema u kojem je unutrašnja energija jednaka nuli je savršeno proizvoljno stanje. Zbog toga je u termodinamici od interesa da se posmatra ne sama unutrašnja energija sistema U, već njena promena usled promene stanja sistema ΔU.

Ako se dva termodinamička sistema (na primer, sistemi sa idealnim gasom) nalaze na različitim temperaturama, pri njihovom kontaktu molekuli sistema više temperature sudarima će predavati enegiju molekulima sistema niže temperature sve dok se temperature ne izjednače. Toplota će, dakle, prelaziti sa tela više na telo niže temperature i pri tome će se unutrašnja energija toplijeg tela smanjivati, a hladnijeg povećavati. Osim prenošenjem toplote, unutrašnja energija se može menjati i radom, s tim što se smanjuje kada sistem vrši rad, a povećava kada se nad sistemom vrši rad.

Broj stepeni slobode sistema predstavlja broj nezavisnih veličina (koordinata) koje odredjuju položaj sistema u prostoru. Položaj materijalne tačke odredjen je sa tri koordinate, a položaj krutog tela sa šest. Na osnovu gornje pretpostavke, atomi raspolažu sa tri stepena slobode translatornog kretanja. Naime,

atomi se razmatraju kao materijalne tačke (sl. 11.1a), pri čemu im se energija rotacionog kretanja može zanemariti ($r \to 0$, $I = mr^2 \to 0$, $E_k = I\omega^2/2 \to 0$).



Sl. 11.1: Uz objašnjenje broja stepeni slobode

U klasičnoj mehanici molekuli dvoatomnog gasa u prvoj aproksimaciji se razmatraju kao sistem od dve materijalne tačke (dva atoma), koje su čvrsto povezane vezom koja se ne može deformisati (na primer, dve kuglice vezane štapom). Ovaj sistem, osim tri stepena slobode translatornog kretanja, ima i dva stepena slobode rotacionog kretanja (sl. 11.1b). Rotacija oko treće ose (ose koja prolazi kroz oba atoma) je malo verovatna zbog najmanjeg momenta inercije molekula. Troatomni i višeatomni molekuli imaju šest stepeni slobode—tri usled translatornog i tri usled rotacionog kretanja (sl. 11.1c). Prirodno je da jake veze medju atomima ne postoje. Zbog toga je kod realnih molekula neophodno uzeti u obzir i stepene slobode oscilatornog kretanja. Nezavisno od ukupnog broja stepeni slobode molekula, tri stepena slobode su uvek vezana za translatorno kretanje. Ovi stepeni slobode su ravnopravni i svakom od njih pripada u srednjem energija jednaka 1/3 vrednosti:

$$<E_1> = \frac{<E>}{3} = \frac{kT}{2}. \tag{11.1}$$

Iz Bolcmanovog zakona o ravnomernoj raspodeli energije po stepenima slobode, koji je dat u klasičnoj statističkoj fizici, proizilazi da za statističke sisteme koji se nalaze u termodinamičkoj ravnoteži svakom stepenu slobode translacije i rotacije pripada u srednjem kinetička energija $kT/2$, a svakom stepenu slobode oscilatornog kretanja kT. Stepen slobode oscilatornog kretanja ima dvostruko veću energiju, jer se pored kinetičke (kao u slučaju translatornog i rotacionog kretanja) javlja i potencijalna energija medju molekulima, pri čemu je srednja vrednost kinetičke i potencijalne energije jednaka. Prema tome, srednja kinetička energija molekula iznosi

$$<E> = \frac{i}{2}kT, \tag{11.2}$$

gde je i zbir stepeni slobode translatornog (i_T), rotacionog (i_R) i dvostrukog broja stepeni slobode oscilatornog kretanja molekula ($2i_O$):

$$i = i_T + i_R + 2i_O. \tag{11.3}$$

Pošto je kod idealnog gasa potencijalna energija medju molekulima jednaka nuli (molekuli medjusobno ne deluju), unutrašnja energija U_m koja se odnosi na jedan mol gasa biće jednaka sumi kinetičkih energija N_a molekula (N_a—Avogadrov broj)

$$U_m = \frac{i}{2}kTN_a = \frac{i}{2}RT. \tag{11.4}$$

Za n molova gasa unutrašnja energija je

$$U = n\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT. \tag{11.5}$$

11.3 Rad gasa pri promeni njegove zapremine

Posmatraće se najjednostavniji termodinamički sistem, idealni gas u cilindru sa pokretnim klipom (sl. 11.2). Ako se sistemu dovede količina toplote Q, ona će se utrošiti na povećanje njegove unutrašnje energije i na rad koji izvrši sistem nasuprot spoljašnjim silama. Ako je klip fiksiran, dovedena količina

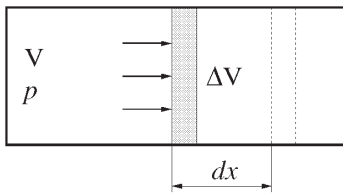
toplote troši se samo na povećanje unutrašnje energije sistema ΔU. Medjutim, ako klip nije fiksiran, dovodjenjem toplote gas se širi, klip se pomera i vrši se rad. Ukoliko se pri širenju gasa klip pomerio za malo rastojanje dx, izvršeni rad je

$$dA = Fdx = pSdx = pdV, \tag{11.6}$$

gde je S površina klipa, a $Sdx = dV$ beskonačno mala zapremina sistema. Ukupan rad koji se izvrši pri promeni zapremine sistema od V_1 do V_2 nalazi se integracijom gornjeg izraza

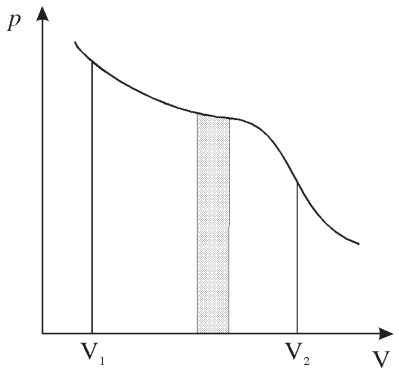
$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{11.7}$$

Rad izvršen pri nekom procesu može se prikazati grafički u $p - V$ dijagramu. Na primer, promena pritiska gasa pri njegovom širenju prikazana je krivom na slici 11.3. Pri povećanju zapremine za dV, izvršeni rad jednak je pdV, tj. odredjen je zasenčenom površinom na slici. Ukupan rad koji izvrši gas pri širenju od zapremine V_1 do zapremine V_2 odredjen je površinom koju ograničavaju apscisna osa, kriva $p = f(V)$ i prave V_1 i V_2.



Sl. 11.2: Cilindar sa pokretnim klipom u kome se nalazi idealni gas

Grafički se mogu predstaviti samo ravnotežni procesi, tj. procesi kod kojih se promena stanja sistema odigrava dovoljno sporo. Svi realni procesi su neravnotežni, ali se u velikom broju slučajeva ta neravnotežnost može zanemariti (što se proces sporije odigrava, bliži je ravnotežnom). Nadalje će se razmatrati samo ravnotežni procesi.



Sl. 11.3: Promena pritiska gasa pri njegovom širenju

Na kraju treba istaći da toplota koja se predaje sistemu, odnosno toplota koju on odaje, nije funkcija stanja, već procesa. Promena unutrašnje energije sistema, naprotiv, ne zavisi od procesa, već samo od početnog i krajnjeg stanja sistema (početne i krajnje temperature sistema). Na primer, kada se gas koji je doveden iz nekog početnog u krajnje stanje, vrati u početno, unutrašnja energija će imati vrednost koju je imala u početnom stanju. Prema tome, unutrašnja energija U je, za razliku od toplote Q i rada A, funkcija stanja.

11.4 Prvi princip termodinamike

Kada se sistemu dovede količina toplote Q, jedan njen deo se troši na povećanje njegove unutrašnje energije ΔU, a ostatak na rad A koji sistem vrši nad okolnim telima. Prema tome, iz zakona održanja

energije sledi

$$Q = \Delta U + A. \tag{11.8}$$

Izraz (11.8) predstavlja matematičku interpretaciju prvog principa termodinamike. Za male promene stanja sistema ovaj izraz dobija oblik

$$dQ = dU + dA, \tag{11.9}$$

ili, korektnije

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{11.10}$$

gde je dU beskonačno mala promena unutrašnje energije sistema, δA beskonačno mali rad i δQ beskonačno mala količina toplote. U izrazu (11.10) dU predstavlja totalni diferencijal, dok δQ i δA to nisu. U daljem izlaganju prvi princip termodinamike biće izražavan u obliku (11.9).

Ako se sistem periodično vraća u početno stanje, promena njegove unutrašnje energije je $\Delta U = 0$. Tada je prema prvom principu termodinamike $Q = A$ (toplota koja se dovodi sistemu jednaka je radu koji on izvrši). Medjutim, nemoguće je konstruisati toplotnu mašinu (toplotna mašina je pretvarač toplotne energije u mehanički rad) koja bi izvršila veći rad od primljene količine toplote. Ovo je jedna od definicija prvog principa termodinamike. Ovaj princip se može definisati i na sledeći način:
Nemoguće je konstruisati mašinu koja bi stvarala energiju ni iz čega (perpetuum mobile prve vrste je nemoguć).

11.5 Specifični toplotni kapaciteti

Kao što je ranije navedeno, specifični toplotni kapacitet materijala predstavlja količinu toplote koja je potrebna za zagrevanje $1\,kg$ materijala za jedan Kelvin ili Celzijusov stepen

$$c = \frac{dQ}{mdT}. \tag{11.11}$$

Molarni cpecifični toplotni kapacitet materijala predstavlja količinu toplote koja je potrebna za zagrevanje jednog mola materijala za jedan stepen

$$C_M = \frac{dQ}{ndT}, \tag{11.12}$$

gde je $n = m/M$ broj molova.

Veza izmedju C_M i c je

$$C_M = c\,M, \tag{11.13}$$

gde je M predstavlja molarnu masu gasa.

Razlikuje se specifični toplotni kapacitet pri stalnoj zapremini, kada se pri zagrevanju materijala zapremina održava konstantnom, i pri stalnom pritisku, kada se pri zagrevanju pritisak održava konstantnim.

Uz korišćenje izraza (11.8) i (11.13) prvi princip termodinamike (11.9) za jedan mol gasa dobija oblik

$$C_M dT = dU_m + pdV_m. \tag{11.14}$$

Ako se gas zagreva pri konstantnoj zapremini, rad spoljašnjih sila jednak je nuli ($pdV_m = 0$), pa se količina toplote dovedena gasu troši samo na povećanje njegove unutrašnje energije

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}, \tag{11.15}$$

tj. molarni specifični toplotni kapacitet gasa pri konstantnoj zapremini C_V jednak je promeni unutrašnje energije jednog mola gasa pri povećanju njegove temperature za jedan stepen. Saglasno izrazu (11.4), važi

$$dU_m = \frac{i}{2} RdT,$$

pa je

$$C_V = \frac{i}{2}R. \tag{11.16}$$

Ako se gas zagreva pri konstantnom pritisku, izraz (11.14) se može napisati u obliku

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}. \tag{11.17}$$

Veličina dU_m/dT ne zavisi od oblika procesa (unutrašnja energija idealnog gasa ne zavisi od p i V, već samo od T), tj. $dU_m/dT = C_V$. Diferenciranjem jednačine gasnog stanja $pV_m = RT$ po T ($p = const.$) i zamenom u izraz (11.17), konačno se dobija

$$C_p = C_V + R. \tag{11.18}$$

Izraz (11.18) naziva se Majerova jednačina i pokazuje da je C_p uvek veće od C_V za veličinu univerzalne gasne konstante. Ovo se objašnjava činjenicom da je pri zagrevanju gasa na konstantnom pritisku potrebna dodatna količina toplote za vršenje rada usled širenja gasa.

Korišćenjem izraza (11.16) za C_V, izraz (11.18) dobija sledeći oblik:

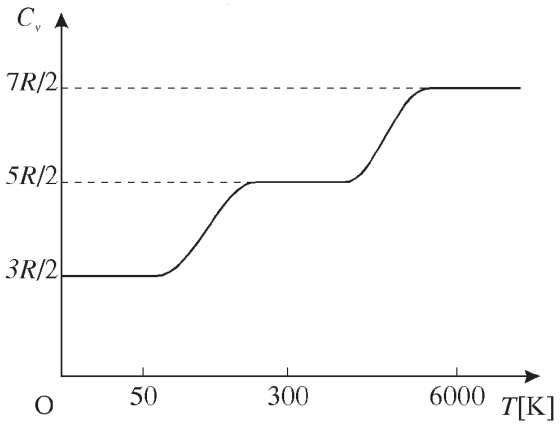
$$C_p = \frac{i+2}{2}R. \tag{11.19}$$

Pri razmatranju termodinamičkih procesa važno je za svaki gas poznavati odnos specifičnih toplotnih kapaciteta

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{11.20}$$

Iz izraza (11.16) i (11.19) sledi da molarni specifični toplotni kapaciteti zavise samo od broja stepeni slobode, a ne i od temperature. Ovakvo ponašanje je molekularno-kinetička teorija kod jednoatomnih gasova utvrdila u širokom temperaturnom opsegu. Medjutim, kod dvoatomnih gasova broj stepeni slobode zavisi od temperature. Molekul dvoatomnog gasa raspolaže sa tri stepena slobode translatornog, dva rotacionog i jednim stepenom slobode oscilatornog kretanja.

Po zakonu o ravnomernoj raspodeli energije po stepenima slobode (11.3), za dvoatomni gas na sobnoj temperaturi je $C_V = 7R/2$. Iz kvalitativne eksperimentalne zavisnosti molarnog specifičnog toplotnog kapaciteta C_V molekula vodonika (sl. 11.4) proizilazi da on zavisi od temperature: pri niskim temperaturama (do $50\,K$) $C_V = 3R/2$, pri sobnoj temperaturi $C_V = 5R/2$ (umesto izračunate $7R/2$) i vrlo visokim temperaturama $C_V = 7R/2$. Ovo se može objasniti pretpostavkom da pri niskim temperaturama postoji samo translatorno, pri sobnoj i rotaciono, a pri visokim temperaturama i oscilatorno kretanje molekula.



Sl. 11.4: Spacifični toplotni kapacitet C_V za vodonik u funkciji temperature

Neslaganje teorije i eksperimenta pokazuje da se pri proučavanju specifičnog toplotnog kapaciteta mora uzeti u obzir kvantovana energija rotacionog i oscilatornog kretanja molekula (nije moguća bilo

koja vrednost rotacione i oscilatorne energije, već samo odredjeni diskretni niz njihovih vrednosti). Ako je energija toplotnog kretanja nedovoljna, na primer, za pobudjivanje oscilovanja, onda to oscilovanje ne utiče na specifični toplotni kapacitet (taj stepen slobode se zanemaruje u zakonu ravnomerne raspodele). Time se objašnjava zašto je specifični toplotni kapacitet dvoatomnog gasa (molekula vodonika) na sobnoj temperaturi jednak $5R/2$ umesto $7R/2$. Na analogan način se može objasniti smanjenje specifičnog toplotnog kapaciteta pri niskim temperaturama ("zamrzavanje" rotacionog stepena slobode) i uvećanje pri visokim temperaturama ("pobudjivanje" oscilatornog stepena slobode).

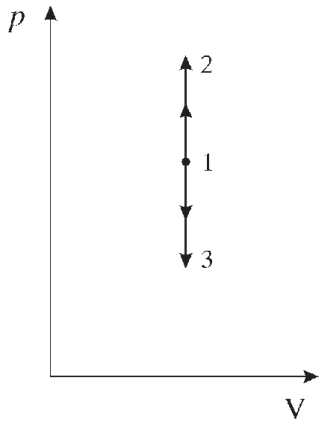
11.6 Rad pri promeni stanja gasa

Korišćenjem prvog zakona termodinamike može se izračunati rad za neke procese u kojima se menja stanje idealnog gasa.

a) **Izohorski proces** ($V = const.$). Dijagram ovog procesa (*izohora*) u $p - V$ dijagramu predstavlja pravu paralelnu ordinati (sl. 11.5). Ovde 1 – 2 predstavlja proces izohorskog zagrevanja, a 1 – 3 izohorskog hladjenja. Pri izohorskom procesu se ne vrši rad, jer je $dV = 0$, pa je $dA = pdV = 0$. Prvi princip termodinamike za ovaj slučaj se može napisati u obliku:

$$dQ = dU. \tag{11.21}$$

Dakle, pri izohorskom procesu se dovedena količina toplote troši na povećanje unutrašnje energije sistema.



Sl. 11.5: Izohorski proces

Prema izrazu (11.15) je

$$dU_m = C_V dT,$$

tako da se za proizvoljnu masu gasa dobija

$$dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \tag{11.22}$$

b) **Izobarni proces** ($p = const.$). Dijagram ovog procesa (*izobara*) u $p - V$ dijagramu predstavlja pravu 1 – 2, paralelnu apscisnoj osi (sl. 11.6). Rad gasa (11.7) pri njegovom izobarnom širenju od zapremine V_1 do V_2 dat je izrazom

$$\int_{V_1}^{V_2} pdV = p(V_2 - V_1), \tag{11.23}$$

i proporcionalan je površini zasenčenog pravougaonika na slici 11.6. Primenom jednačine gasnog stanja za dva stanja koja su ovde odabrana dobija se

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1; \qquad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

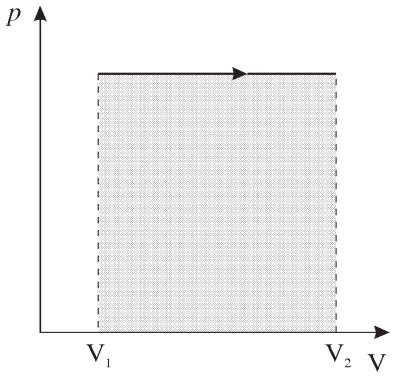
Razlika zapremina je

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M}\frac{R}{p}(T_2 - T_1), \tag{11.24}$$

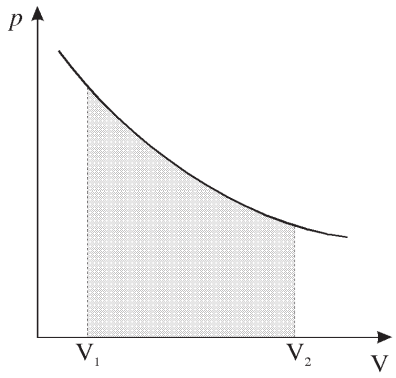
pa izraz (11.23) dobija oblik

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \tag{11.25}$$

Iz ovog izraza može se uočiti fizički smisao univerzalne gasne konstante R. Naime, ako je $T_2 - T_1 = 1\,K$ onda je za jedan mol gasa $R = A$, tj. univerzalna gasna konstanta je brojno jednaka radu pri širenju jednog mola idealnog gasa, kada se on zagreje za $1\,K$.



Sl. 11.6: Izobarski proces



Sl. 11.7: Izotermski proces

Kada se pri izobarnom procesu gasu mase m dovede količina toplote

$$dQ = \frac{m}{M}C_p dT,$$

njegova unutrašnja energija se poveća za vrednost

$$dU = \frac{m}{M}C_V dT.$$

U tom slučaju gas izvrši rad dat izrazom (11.25).

c) **Izotermski proces** ($T = const.$). Dijagram ovog procesa (*izoterma*) u $p - V$ dijagramu, kao što je ranije naglašeno, predstavlja hiperbolu (sl. 11.7). Dakle, gas se ponaša po Bojl-Mariotovom zakonu.

Korišćenjem izraza (11.7) i (10.26) može se doći do izraza za rad gasa pri izotermskom procesu

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}, \tag{11.26}$$

koji je jednak zasenčenoj površini ispod izoterme u $p - V$ dijagramu.

Iz prvog principa termodinamike (11.9) sledi da je za izotermski proces

$$dQ = dA. \tag{11.27}$$

Kako je $T = const.$, to je

$$dU = \frac{m}{M}C_V dT = 0,$$

pa se celokupna količina toplote dovedena gasu troši na vršenje rada nasuprot spoljašnjim silama

$$Q = A = \frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{11.28}$$

Dakle, da bi pri širenju gasa temperatura ostala konstantna, neophodno je dovoditi količinu toplote ekvivalentnu radu koji gas vrši tokom širenja.

11.7 Adijabatski proces

Pod adijabatskim procesom se podrazumeva promena stanja sistema bez razmene toplote izmedju njega i okoline. Ovakvi procesi u prirodi ne postoje, ali im se po svojim osobinama približavaju procesi koji se brzo odigravaju. Tako se, na primer, širenje zvuka može smatrati adijabatskim procesom, jer je brzina prostiranja zvučnih talasa veoma velika, tako da praktično ne dolazi do razmene energije izmedju talasa i sredine kroz koju se oni kreću.

Iz prvog principa termodinamike (11.9) proizilazi da je za adijabatski proces

$$dA = -dU, \tag{11.29}$$

tj. spoljašnji rad se vrši na račun unutrašnje energije sistema. Prema tome, adijabatski proces je suprotan izotermskom, kod koga se rad vrši na račun toplote dovedene spolja.

Korišćenjem izraza (11.29) i (11.15), za proizvoljnu masu gasa se dobija sledeći izraz:

$$dA = pdV = -\frac{m}{M}C_V dT. \tag{11.30}$$

Diferenciranjem jednačine stanja idealnog gasa $pV = mRT/M$ po T dobija se

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M}RdT. \tag{11.31}$$

a eliminisanjem temperature T iz jednačina (11.30) i (11.31):

$$\frac{pdV + Vdp}{pdV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}. \tag{11.32}$$

Razdvajanjem promenljivih i uzimajući da je $\kappa = C_p/C_V$, dobija se

$$\frac{dp}{p} = -\kappa\frac{dV}{V}. \tag{11.33}$$

Integracijom ove jednačine u granicama od p_1 do p_2, što odgovara zapreminama V_1 i V_2, dolazi se do konačnog izraza

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa},$$

ili

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}. \tag{11.34}$$

Pošto su stanja 1 i 2 izabrana proizvoljno, u opštem slučaju gornji izraz se može napisati u obliku

$$pV^{\kappa} = const. \tag{11.35}$$

Izraz (11.35) je poznat pod nazivom Puasonova jednačina.

Za prelazak na promenljive T i V ili T i p, takodje se može iskoristiti jednačina gasnog stanja (14.26), pri čemu se eliminiše pritisak ili zapremina. Tako se mogu dobiti još dva važna izraza:

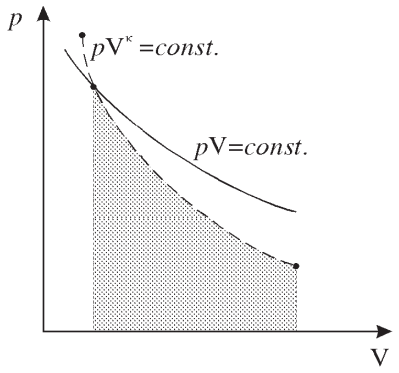
$$TV^{\kappa-1} = const. \tag{11.36}$$

$$T^{\kappa}p^{1-\kappa} = const. \tag{11.37}$$

Izrazi (11.35) do (11.37) predstavljaju jednačine adijabatskog procesa. U ovim jednačinama se bezdimenziona veličina (11.20)

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i} \tag{11.38}$$

naziva Puasonov koeficijent. Za jednoatomne gasove (H, He i dr.) je $i = 3$, pa je $\kappa = 1,67$, za dvoatomne (H_2, N_2, O_2 i dr.) $i = 5$ ($\kappa = 1,4$). Vrednosti za κ izračunate po izrazu (11.38) dobro se slažu sa eksperimentalnim rezultatima.



Sl. 11.8: Izoterma i adijabata

Na slici 11.8 izvršeno je poredjenje izoterme ($pV = const.$) i adijabate ($pV^\kappa = const.$). Pošto je $\kappa > 1$, adijabata je strmija od izoterme. Ovo se objašnjava činenicom da pri adijabatskom sabijanju dolazi do povećanja pritiska gasa, kako usled smanjenja njegove zapremine (kao pri izotermskom procesu), tako i usled povećanja temperature.

Da bi se došlo do izraza za rad kod adijabatskog procesa treba poći od izraza (11.23), uzimajući da je $p = nRT/V$, tj.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = nR \int_{V_1}^{V_2} T\frac{dV}{V}. \tag{11.39}$$

Kod adijabatskog širenja temperatura u izrazu (11.39) nije konstantna. Zato će promene u gasu biti izražene pomoću Puasonove jednačine (11.36)

$$TV^{\kappa-1} = const.$$

Diferenciranjem ove jednačine dobija se

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\kappa - 1}\frac{dT}{T}, \tag{11.40}$$

a zamena ovog izraza u (11.39) daje

$$A = nR \int_{V_1}^{V_2} T\frac{dV}{V} = -\frac{nR}{\kappa - 1} \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1), \tag{11.41}$$

gde su T_1 i T_2 temperature koje odgovaraju početnoj i krajnjoj zapremini V_1 i V_2.

Rad koji se izvrši pri adijabatskom širenju (jednak zasenčenoj površini na slici 11.8) manji je od izotermskog. Ovo se objašnjava činjenicom da pri adijabatskom širenju dolazi do hladjenja gasa, dok se pri izotermskom širenju temperatura održava konstantnom na račun toplote dovedene spolja.

11.8 Kružni procesi

11.8.1 Reverzibilni i ireverzibilni procesi

Kao što je na početku ovog poglavlja naglašeno, termodinamički procesi mogu biti reverzibilni (povratni) i ireverzibilni (nepovratni). Proces je reverzibilan ako sistem prolazi kroz niz ravnotežnih stanja. U tom slučaju se proces može odvijati i u suprotnom smeru, vraćajući se kroz ista ravnotežna stanja u početno. Svako od tih ravnotežnih stanja može se opisati tačkom u $p - V$ dijagramu, tako da će čitav proces biti predstavljen krivom $p = f(V, T)$. Ovo se može pokazati pomoću jednog jednostavnog primera. Ako se idealnom gasu pri konstantnoj zapremini poveća pritisak za malu vrednost dp, temperatura će mu se povećati za dT i gas će iz jednog stanja termodinamičke ravnoteže preći u drugo. Pre

procesa sve tačke sistema imale su iste termodinamičke koordinate (p, V , T), a posle procesa ponovo sve tačke sistema imaju jednake termodinamičke koordinate ($p + dp$, V, $T + dT$). Gas se može vratiti u prvobitno stanje jednostavno, smanjivanjem pritiska za dp, pri čemu će se temperatura sniziti za dT.

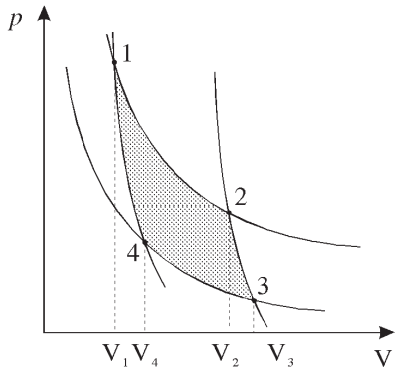
Reverzibilni proces se mora odvijati dovoljno sporo, tako da sistem u svakom momentu bude u ravnoteži. Takav proces vodi sistem od početnog, preko niza ravnotežnih, do konačnog stanja. Na primer, ako se smanjuje zapremina gasa nizom beskonačno malih promena pritiska, dozvoljavajući da se nakon svake promene uspostavi ravnoteža, to je reverzibilan proces, jer se može vratiti natrag preko istih ravnotežnih stanja i u svakom momentu imati definisane termodinamičke koordinate sistema.

Ako se sabijanje izvrši naglo, gas će is početnog stanja preći u konačno kroz niz neravnotežnih stanja, tj proces će biti ireverzibilan. Takav proces se ne može opisati krivom u $p - V$ dijagramu, niti izvršiti u obrnutom smeru, tako da se sistem i okolina vrate u isto početno stanje.

11.8.2 Karnov kružni proces

Kod parnih mašina je uočeno da se samo deo toplotne energije pretvara u mehanički rad. Odnos iskorišćene i dovedene energije η naziva se *stepen korisnog dejstva* (stepen iskorišćenja).

Karno (Karnot) je, proučavajući rad toplotnih mašina, teorijski obradio kružni proces u kojem se sistem sa idealnim gasom nakon dva izotermska i dva adijabatska procesa vraća u početno stanje, te tako dovedenu količinu toplote delimično pretvara u mehanički rad.



Sl. 11.9: Karnov kružni proces

Na slici 11.9 prikazan je Karnov kružni proces u $p - V$ dijagramu. Izotermsko širenje i sabijanje prikazani su krivama 1 – 2 i 3 – 4, a adijabatsko širenje i sabijanje krivama 2 – 3 i 4 – 1, respektivno. Pri izotermskom procesu unutrašnja energija se ne menja ($U = const.$), pa je, saglasno izrazu (11.28), količina toplote Q_1 koju dobija gas jednaka radu koji on izvrši pri prelasku iz stanja 1 u stanje 2

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \tag{11.42}$$

Pri adijabatskom širenju 2 – 3 nema razmene toplote sa okolinom, pa se rad pri širenju gasa A_{23} vrši na račun promene unutrašnje energije, tj.

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1). \tag{11.43}$$

Tolota Q_2 koja se oslobadja pri izotermskom sabijanju jednaka je radu koji se izvrši nad sistemom

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \tag{11.44}$$

U ovom slučaju rad i toplota su negativne veličine. Rad pri adijabatskom sabijanju je

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}. \tag{11.45}$$

Ukupan rad koji se izvrši pri kružnom procesu

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2 \tag{11.46}$$

jednak je zasenčenoj površini na slici 11.9.

Koeficijent korisnog dejstva u ovom slučaju se može izraziti kao

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \tag{11.47}$$

Primenujući izraz (11.36) za adijabate 2 – 3 i 4 – 1, dobija se

$$T_1 V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}; \qquad T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_4^{\kappa-1}$$

ili

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4}. \tag{11.48}$$

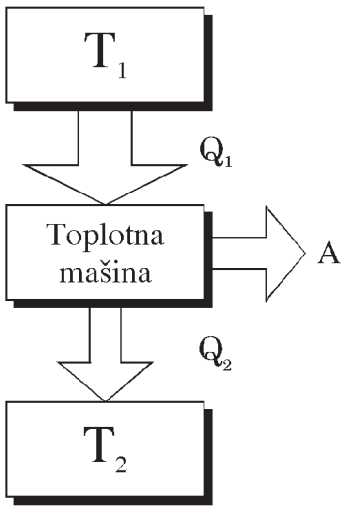
Zamenom izraza (11.42) i (11.44) u (11.47) i korišćenjem izraza (11.48), za koeficijent korisnog dejstva konačno se dobija

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{11.49}$$

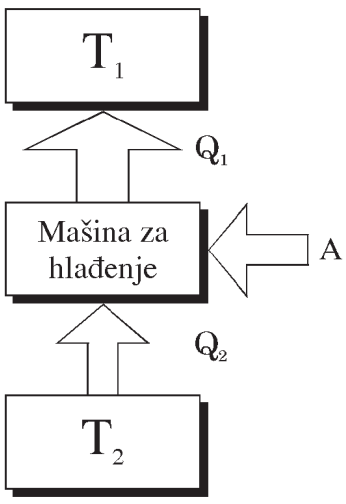
11.9 Drugi princip termodinamike

Prvi princip termodinamike daje kvantitativni odnos izmedju količine toplote, rada i promene unutrašnje energije sistema, ali ne odredjuje smer vršenja procesa u prirodi. Prema ovom principu moguć je prelaz energije u obliku toplote od tela više na telo niže temperature, i obratno.

Smer odvijanja procesa koji su vezani sa promenom energije u prirodi odredjuje drugi princip termodinamike. Ovaj princip proizilazi iz analize rada toplotnih mašina (sl. 11.10). Toplotne mašine rade tako što se od rezervoara više temperature T_1 (grejač), u toku ciklusa oduzima količina toplote Q_1, a rezervoaru sa nižom temperaturom T_2 (hladnjak) predaje količina toplote Q_2. Izvršeni rad u toku ciklusa je $A = Q_1 - Q_2$.



Sl. 11.10: Princip rada toplotne mašine



Sl. 11.11: Princip rada mašine za hladjenje

Da bi koeficijent korisnog dejstva toplotne mašine bio jednak jedinici, potrebno je da bude $Q_2 = 0$, tj. da toplotna mašina ima samo jedan rezervoar toplote. Karno je pokazao da ovo nije moguće i da su za rad toplotne mašine potrebna najmanje dva rezervoara toplote sa različitim temperaturama.

Postoji nekoliko definicija drugog principa termodinamike:
Koeficijent korisnog dejstva toplotne mašine odredjen je samo temperaturom grejača i hladnjaka (Karno).
Toplota ne može spontano prelaziti sa tela niže na telo više temperature (Klauzijus).

U prirodi je nemoguć proces kod kojeg bi se celokupna toplota pretvorila u rad (Plank), tj. *nemoguć je perpetuum mobile druge vrste*. Perpetuum mobile druge vrste bila bi mašina koja bi stalno davala rad na račun toplote okolnih tela. Nemoguća je mašina koja bi, na primer, koristila toplotu morske vode za dobijanje rada. Ovakva mašina ne bi bila u suprotnosti sa zakonom održanja energije, jer bi koristila postojeću toplotnu energiju, a voda bi se postepeno hladila (zato je i dobila naziv perpetuum mobile druge vrste). Medjutim, ovakva mašina je protivna drugom principu termodinamike, jer bi za dobijanje rada iz ove toplote bila neophodna sredina sa znatno nižom temperaturom, što u prirodi ne postoji.

Proces obrnut od procesa rada toplotnih mašina koristi se kod mašina za hladjenje, čiji je princip rada prikazan na slici 11.11. U toku ciklusa od rezervoara niže temperature T_2 oduzima se količina toplote Q_2, a rezervoaru više temperature T_1 predaje količina toplote Q_1. Za kružni proces je $Q = A$, konkretno $Q = A = Q_2 - Q_1 < 0$. Odavde je $Q_2 - Q_1 = -A$ ili $Q_1 = Q_2 + A$, tj. količina toplote Q_1 veća je od Q_2 za vrednost rada koji se izvrši nad sistemom. Prema tome, bez vršenja rada nije moguće oduzeti toplotu od tela niže temperature i predati je telu više temperature.

12. Oscilacije

12.1 Mehaničke oscilacije

12.1.1 Periodično kretanje. Harmonijsko oscilovanje

Pod periodičnim kretanjem podrazumeva se kretanje tela ili materijalne tačke, kada se ono posle nekog vremenskog intervala vraća u prvobitni položaj. U jednostavnija periodična kretanja spada kretanje tela po putanji koja predstavlja zatvorenu konturu bilo kog oblika. Jedan od primera takvog kretanja je rotacija planeta po eliptičnim putanjama.

Ako se periodično kretanje vrši po putanji koja nije zatvorena, naizmenično na jednu ili drugu stranu od ravnotežnog položaja, govori se o *oscilatornom kretanju*. Primer jednostavnijeg oscilatornog kretanja predstavlja kretanje tela mase m, obešenog o oprugu ili nit, oko ravnotežnog položaja. U jednostavnija oscilovanja spadaju, takodje, i oscilacije zategnutih žica i membrana koje služe za proizvodjenje zvuka. Sem toga, u ovu vrstu kretanja spada i oscilovanje atoma u rešetki čvrstog tela, kao i električnog i magnetnog polja kod elektromagnetnih talasa.

Sistem koji vrši oscilatorno kretanje naziva se *oscilator*. Ako oscilator vrši oscilacije bez uticaja spoljašnih sila, kaže se da on vrši *slobodne* (sopstvene) *oscilacije*. Oscilator može da vrši i *prinudne oscilacije* pod dejstvom spoljašnjih sila. Na svaki realni oscilator deluje uvek sila trenja, pa on vrši *prigušene* (amortizovane) *oscilacije*.

Oscilatorno kretanje karakterišu sledeće fizičke veličine: *period oscilovanja* T, *elongacija* (pomeraj) x i *amplituda* A. Period oscilovanja predstavlja vreme za koje telo izvrši jednu punu oscilaciju. To je vreme koje protekne izmedju dva identična fizička stanja sistema. Recipročna vrednost perioda oscilovanja naziva se *frekvencija* (učestanost) ν i predstavlja broj oscilacija u jedinici vremena. Elongacija predstavlja udaljenje oscilatora od ravnotežnog položaja u bilo kom momentu. Amplituda predstavlja maksimalnu vrednost elongacije. Dakle, opseg kretanja tela je $2A$.

Matematička interpretacija oscilatornog kretanja je prilično komplikovana. Zbog toga će dalja izlaganja ove problematike biti ograničena na analizu jedne specijalne vrste oscilatornog kretanja, koje se naziva *harmonijsko oscilatorno kretanje*. To je takvo kretanje kod koga se elongacija u toku vremena menja po sinusnom ili kosinusnom zakonu, tj.

$$x = A\sin(\omega t + \phi); \qquad x = A\cos(\omega t + \phi), \tag{12.1}$$

gde je $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ kružna frekvencija. Argument sinusa ili kosinusa $(\omega t + \phi)$ predstavlja *fazu oscilovanja* u momentu t, a ϕ *početnu fazu*. Početna faza odredjuje vrednost elongacije u momentu posmatranja ($t = 0$). Za sinusne oscilacije pri $t = 0$, $x = A\sin\phi$. Ako se posmatranje oscilatornog kretanja vrši u trenutku $t = 0$ (kada je $x = 0$), onda je $\phi = 0$.

Izrazi (12.1) opisuju harmonijsko oscilatorno kretanje, koje se vrši bilo po pravolinijskoj ili krivolinijskoj putanji. U tom slučaju je za odredjivanje položaja tela koje osciluje dovoljno poznavati vrednost elongacije x. Ako telo osciluje oko ravnotežnog položaja po pravolinijskoj putanji, govori se o *prostom harmonijskom oscilovanju*.

12.1.2 Brzina i ubrzanje kod harmonijskog oscilovanja. Jednačina harmonijskog oscilovanja

Oscilator prikazan na slici 12.1 se sastoji od elastične opruge o koju je obešeno telo mase m. Neka se telo pomeri iz ravnotežnog položaja (tačka O) na rastojanje x, pri čemu je početna faza $\phi = 0$. Pošto telo vrši harmonijske oscilacije, što će biti pokazano u daljem tekstu, elongacija se može izraziti u obliku

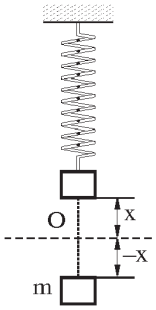
$$x = A\sin\omega t, \tag{12.2}$$

gde su A i ω konstantne veličine. Brzina tela je izvod elongacije po vremenu, odnosno

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t = v_o \cos \omega t = v_o \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \tag{12.3}$$

gde je $v_o = A\omega$ maksimalna vrednost brzine (amplituda brzine).

Iz izraza (12.3) se vidi da se brzina tela, kao i elongacija, menja sa vremenom po sinusnom zakonu sa frekvencijom ω, ali je fazna razlika izmedju ove dve veličine $\pi/2$. To znači da se, u momentu kada je elongacija jednaka nuli, telo kreće maksimalnom brzinom.



Sl. 12.1: Oscilovanje tela mase m obešenog o elastičnu oprugu

Pošto se brzina tela pri harmonijskom oscilovanju kontinualno menja u toku vremena ovo kretanje je ubrzano, pa se ubrzanje u toku vremena, menja po sinusnom zakonu

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t = a_o \sin(\omega t + \pi), \tag{12.4}$$

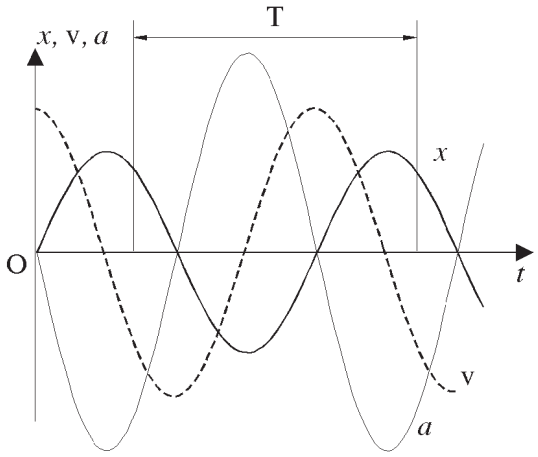
gde je $a_o = A\omega^2$ maksimalna vrednost ubrzanja (amplituda ubrzanja).

Fazna razlika izmedju ubrzanja i elongacije je jednaka π, a fazna razlika izmedju brzine i ubrzanja je $\pi/2$. Zamenom u izrazu (12.4) $A \sin \omega t$ sa x dobija se

$$a = -\omega^2 x, \tag{12.5}$$

tj., pri harmonijskom oscilovanju tela ubrzanje je srazmerno elongaciji i ima suprotan znak od nje. Na slici 12.2 prikazana je promena elongacije, brzine i ubrzanja u toku vremena. Kao što se sa slike vidi, periodu oscilovanja odgovara promena faze za 2π. Ako je, na primer, u momentu t faza oscilovanja bilo koje od tri pomenute veličine bila $\omega t + \phi$, onda će posle vremena T ona biti jednaka $\omega(t + T) + \phi$, pa je razlika tih faza jednaka

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi.$$



Sl. 12.2: Zavisnost elongacije, brzine i ubrzanja od vremena

Izraz (12.5) može se napisati i u sledećem obliku:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{12.6}$$

Ovo je diferencijalna jednačina koja odredjuje vremensku zavisnost udaljenosti tela od ravnotežnog položaja. Može se pokazati da, kada se x menja sa vremenom prema izrazima (12.1), ono zadovoljava jednačinu (12.6).

Za opisivanje harmonijskog oscilatornog kretanja često se koristi kompleksna funkcija za elongaciju

$$x = A\exp\left[i(\omega t + \phi)\right] \tag{12.7}$$

koja u svom realnom delu sadrži kosinusnu funkciju, a u imaginarnom delu sinusnu funkciju

$$\exp\left[i(\omega t + \phi)\right] = \cos\left(\omega t + \phi\right) + i\sin\left(\omega t + \phi\right), \tag{12.8}$$

gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Prema tome, izraz (12.1) se može napisati u eksponencijalnom obliku:

$$x = A\exp\left[i(\omega t + \phi)\right]. \tag{12.9}$$

Realnim delom izraza (12.8)

$$Re(x) = A\cos\left(\omega t + \phi\right) = x$$

može se opisati harmonijsko oscilovanje.

12.1.3 Grafički prikaz harmonijskog oscilovanja

Pošto izrazi za harmonijsko oscilovanje sadrže sinusne, odnosno kosinusne funkcije, mora postojati veza izmedju ove vrste kretanja i kružnog kretanja. Naime, ako se materijalna tačka kreće po kružnoj putanji, uniformnim kretanjem brzinom v, onda će njene projekcije na koordinatne ose vršiti harmonijske oscilacije (sl. 12.3)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

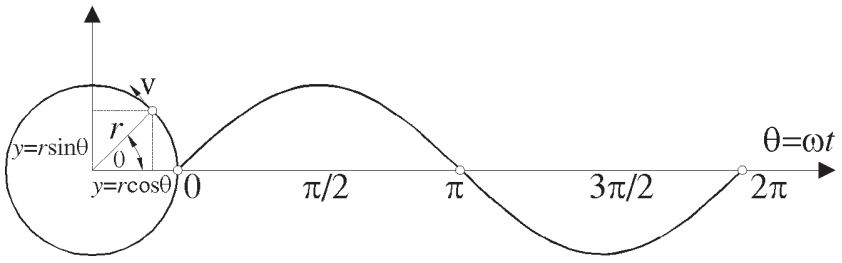
Pošto je kod uniformnog kružnog kretanja

$$\theta = \frac{v}{r}t = \omega t,$$

to je

$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t,$$

tj. projekcija materijalne tačke koja se kreće po kružnoj putanji uniformnim kretanjem vrši harmonijsko oscilovanje. Kružna frekvencija toga oscilovanja data je ugaonom brzinom $\omega = v/r$. Grafički prikaz oscilovanja u toku vremena predstavlja krivu čiji je period $T = 2\pi/\omega$ (sl. 12.3).



Sl. 12.3: Grafički prikaz harmonijskog oscilovanja

12.1.4 Sila kod harmonijskog oscilatornog kretanja. Jednostavniji harmonijski oscilatori

Kao što je ranije istaknuto, oscilatorno kretanje spada u ubrzana kretanja, jer se vrši pod uticajem neke sile. Ako telo mase m vrši harmonijsko oscilovanje (sl. 12.1), onda, saglasno drugom Njutnovom (Newton) zakonu, na njega mora da deluje sila F:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \tag{12.10}$$

gde je $k = m\omega^2$ koeficijent, brojno jednak sili pri jediničnoj elongaciji (direkciona sila). Pravac sile se poklapa sa pravcem ubrzanja, a vektor ubrzanja će, saglasno izrazu (12.5), imati smer ka ravnotežnom položaju. Dakle, da bi telo vršilo prosto harmonijsko oscilovanje na njega mora da deluje sila koja je uvek upravljena ka ravnotežnom položaju i čiji je intenzitet srazmeran elongaciji. Ta sila se naziva *restituciona sila*.

Iz izraza (12.10) može se dobiti izraz za period oscilovanja oscilatora prikazanog na sl. 12.1. Pošto je $k = m\omega^2$, a $\omega = 2\pi/T$, period oscilovanja je

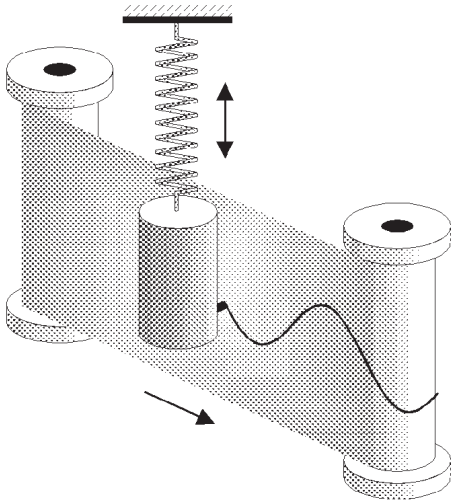
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{12.11}$$

Dakle, period oscilovanja zavisi od mase tela i direkcione sile koja se za oscilator prikazan na slici 12.1 naziva još i krutost opruge.

Ovde će biti razmatrano nekoliko primera jednostavnijih oscilatora.

a) *Telo mase m obešeno o elastičnu oprugu*

U ovom slučaju restitucionu silu, koja deluje na telo mase m, predstavlja sila elastične opruge nastala njenom deformacijom (sl. 12.1). Ova sila je pri malim deformacijama opruge, proporcionalna elongaciji tela koje osciluje (izraz 12.10). Ako na oscilator deluje samo restituciona sila F, pri čemu k ostaje konstantno, oscilovanje će biti harmonijsko. To se može proveriti pomoću sistema prikazanog na slici 12.4. Kada telo mase m, na kome se nalazi olovka, osciluje normalno na pravac uniformnog kretanja papirne trake, olovka će ispisivati sinusoidnu liniju. Ako se temperatura opruge u toku oscilacija menja, onda se k, a time i frekvencija oscilovanja, menja, pa oscilovanje nije harmonijsko.



Sl. 12.4: Aparatura za demonstraciju prostog harmonijskog oscilatornog kretanja

b) *Sistem koji vrši torzione oscilacije (torziono klatno)*

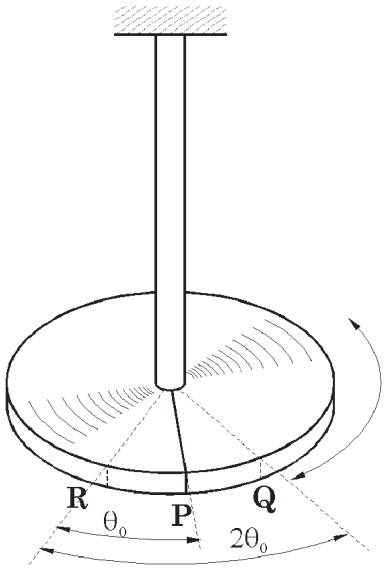
Pri torzionom oscilovanju (sl. 12.5) na telo deluje restitucioni moment, koji sprečava njegov otklon od ravnotežnog položaja, a kada se telo otkloni od ravnotežnog položaja, onda mu on saopštava ubrzanje ka ravnotežnom položaju. Restitucioni moment se u ovom slučaju pojavljuje usled deformacije žice kada se ploča kružnog oblika, koja je obešena o nju, zakrene za izvestan ugao u horizontalnoj ravni. Pri malom uglu otklona od ravnotežnog položaja restitucioni moment je proporcionalan tom uglu.

Ako je torziono oscilovanje harmonijsko, tj. ako je

$$\theta = \theta_o \sin\omega t, \tag{12.12}$$

onda se ugaona brzina $d\theta/dt$ i ugaono ubrzanje $d^2\theta/dt^2$, takodje, menjaju po sinusnom zakonu, odnosno

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_o\omega\cos\omega t; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_o\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\theta. \tag{12.13}$$



Sl. 12.5: Torziono klatno

Restitucioni moment M je jednak proizvodu momenta inercije tela I i ugaonog ubrzanja

$$M = -I\omega^2\theta = -c\theta, \tag{12.14}$$

gde je $c = I\omega^2$ konstantna veličina pošto je $I = const$. Konstanta c se naziva torziona konstanta i može se odrediti ako je poznata vrednost momenta M, merenjem ugla torzije

$$c = \frac{M}{\theta}.$$

Kružna frekvencija i period oscilovanja mogu se izraziti na sledeći način:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}, \tag{12.15}$$

pošto je $\omega = 2\pi/T$.

c) *Fizičko klatno*

Pod fizičkim klatnom podrazumeva se kruto telo bilo kog oblika koje može da osciluje oko horizontalne ose pod dejstvom gravitacione sile (sl. 16). Znači, restitucioni moment predstavlja moment usled dejstva gravitacione sile i ima suprotan smer od elongacije x, tj.

$$M = -Qx = -mgl_o \sin\theta, \tag{12.16}$$

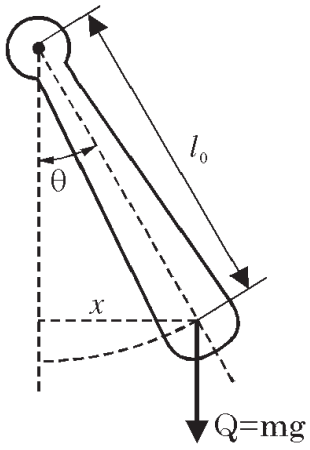
gde je l_o rastojanje od tačke oslonca do težišta tela. Pri malom otklonu od ravnotežnog položaja može se uzeti da je $\sin\theta \approx \theta$, pa je restitucioni moment

$$M = -mgl_o\theta = -c\theta \tag{12.17}$$

proporcionalan uglu otklona i tada će oscilovanje klatna biti harmonijsko. Uporedjivanjem izraza (12.17) sa (12.14) dobija se da je $I\omega^2 = mgl_o$, pa su frekvencija i period oscilovanja dati izrazima

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_o}{I}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl_o}}. \tag{12.18}$$

Pri većim uglovima otklona, a takodje i pri deformaciji tela u toku oscilovanja (I i l_o se menja) oscilovanje nije harmonijsko.



Sl. 12.6: Fizičko klatno

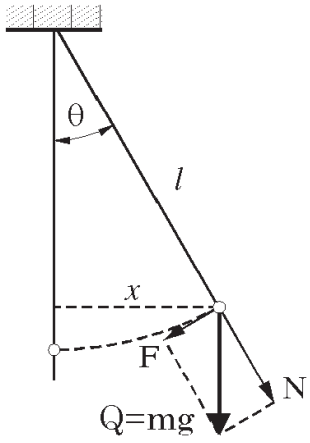
d) *Matematičko klatno*

Matematičko klatno predstavlja telo malih dimenzija (na primer kuglicu), obešeno o lak i neistegljiv konac dužine l, koje može da osciluje oko ravnotežnog položaja pod uticajem gravitacione sile (sl. 12.7). Kuglica se kreće po luku. Restituciona sila F je komponenta sile Q i ima pravac tangente na putanju po kojoj se telo kreće. Za male uglove luk se može aproksimirati pravom linijom pa je

$$\sin\theta \approx \frac{x}{l}. \tag{12.19}$$

Izraz za silu F, na osnovu slike 12.7, može se napisati u obliku:

$$F = Q\sin\theta = mg\frac{x}{l}. \tag{12.20}$$



Sl. 12.7: Matematičko klatno

Pošto je ova sila uvek upravljena ka ravnotežnom položaju i ima smer suprotan elongaciji x to u izrazu (12.20) treba uzeti znak minus, pa je

$$F = -\frac{mg}{l}x = -kx. \tag{12.21}$$

Dakle, dobijen je izraz za silu, koji važi za harmonijsko oscilatorno kretanje. To pokazuje da je za male uglove otklona od ravnotežnog položaja kretanje matematičkog klatna prosto harmonijsko. Izjednačavanjem izraza (12.21) sa (12.10) dobija se

$$\frac{mg}{l} = m\omega^2; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{12.22}$$

tj. period oscilovanja ne zavisi od mase tela koje osciluje, već od dužine klatna i ubrzanja Zemljine teže.

12.1.5 Energija kod harmonijskog oscilatornog kretanja

Oscilatorno kretanje je praćeno naizmeničnim pretvaranjem kinetičke u potencijalnu energiju oscilatora i obrnuto. Ako oscilator vrši slobodne oscilacije, onda će zbir kinetičke i potencijalne energije (ukupna energija) na bilo kom rastojanju od ravnotežnog položaja i u bilo kom momentu imati istu vrednost.

Kinetička energija tela mase m koje vrši harmonijsko oscilovanje jednaka je

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2. \tag{12.23}$$

Korišćenjem izraza (12.3) za brzinu v, kinetička energija se može izraziti u obliku:

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t = \frac{kA^2}{2}\cos^2\omega t. \tag{12.24}$$

Ako se oscilovanje vrši pod dejstvom opruge, potencijalna energija tela koje vrši harmonijsko oscilatorno kretanje dobija se iz izraza za potencijalnu energiju elastične deformacije opruge

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \tag{12.25}$$

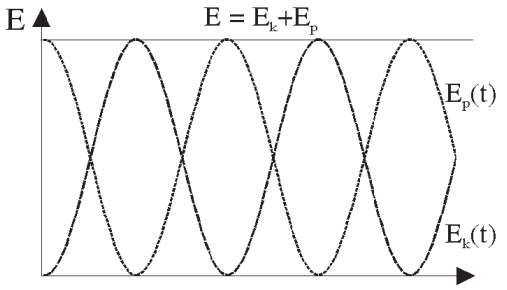
Korišćenjem izraza (12.2) za elongaciju, dobija se konačan izraz za potencijalnu energiju tela koje vrši harmonijsko oscilovanje

$$E_p = \frac{kA^2}{2}\sin^2\omega t. \tag{12.26}$$

Ukupna energija E tela koje vrši harmonijsko oscilovanje jednaka je zbiru kinetičke i potencijalne energije

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = const. = E_0. \tag{12.27}$$

Zavisnosti kinetičke, potencijalne i ukupne energije od vremena prikazane su na slici 12.8.

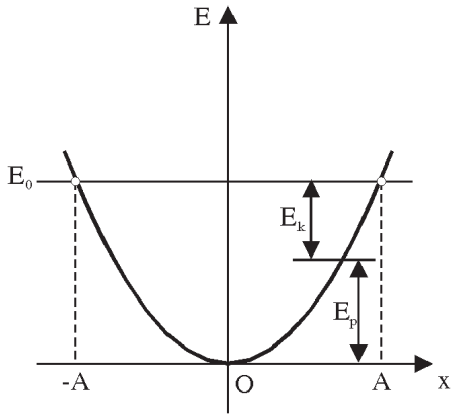


Sl. 12.8: Kinetička, potencijalna i ukupna energija u funkciji vremena

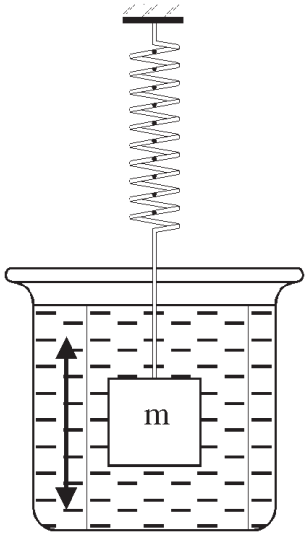
Izraz (12.27) pokazuje da je zbir kinetičke i elastične potencijalne energije pri harmonijskom oscilovanju zaista konstantan. Značenje izraza (12.27) može se videti na slici 12.9, na kojoj je prikazana energija oscilatora E u funkciji elongacije x. Ukupna energija oscilatora je na slici data pravom $E_o = const.$, a svaka tačka na paraboli deli tu energiju na potencijalni (ispod) i kinetički deo energije (iznad krive). Amplitude oscilovanja su označene sa $\pm A$. Harmonijsko oscilovanje energetski je analogno kretanju kuglice bez trenja, u gravitacionom polju, po paraboličnoj putanji (jami) visine E_o, pri čemu ona ostaje unutar takve jame. Dakle, za telo koje harmonijski osciluje može se reći da se nalazi unutar potencijalne jame. Pojam potencijalne jame često se koristi u kvantnoj mehanici.

12.1.6 Prigušene oscilacije

Pri dosadašnjem razmatranju oscilacija nije uzimana u obzir sila trenja, koja se uvek javlja pri kretanju oscilatora u nekoj sredini. Dejstvo ove sile bitno menja njegov karakter kretanja, tj. oscilovanje postaje *prigušeno* (amortizovano). Takav slučaj se može ostvariti ako se telo mase m, koje je obešeno o oprugu,



Sl. 12.9: Kinetička i potencijalna energija kod prostog harmonijskog oscilovanja



Sl. 12.10: Prigušene oscilacije pod dejstvom sile viskoznosti tečnosti

nalazi u nekoj tečnosti (sl. 12.10). U ovom slučaju pri oscilovanju, pored restitucione sile, delovaće i sila trenja F_{tr} tečnosti. Tada će jednačina kretanja imati sledeći oblik:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_{tr}. \tag{12.28}$$

Da bi se rešila ova diferencijalna jednačina neophodno je poznavati parametre od kojih zavisi sila trenja. Obično se uzima da je, pri malim amplitudama i frekvencijama oscilovanja, sila trenja F_{tr} proporcionalna brzini kretanja tela i ima suprotan smer od ove brzine, tj.

$$F_{tr} = -\mu v = -\mu\frac{dx}{dt}, \tag{12.29}$$

gde je μ koeficijent trenja i zavisi od prirode sredine u kojoj se vrše oscilacije. Zamenom izraza (12.29) u (12.28) i deljenjem sa m dobija se

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{12.30}$$

gde je $2\beta = \mu/m$ i $\omega^2 = k/m$. Ovde je β koeficijent prigušenja, a ω kružna frekvencija slobodnih (neprigušenih) oscilacija, kada je $\beta = 0$, tj. kada oscilator pri oscilovanju ne predaje energiju sredini.

Rešenje jednačine (12.30) zavisi od razlike

$$\omega^2 - \beta^2 = \omega_1^2, \tag{12.31}$$

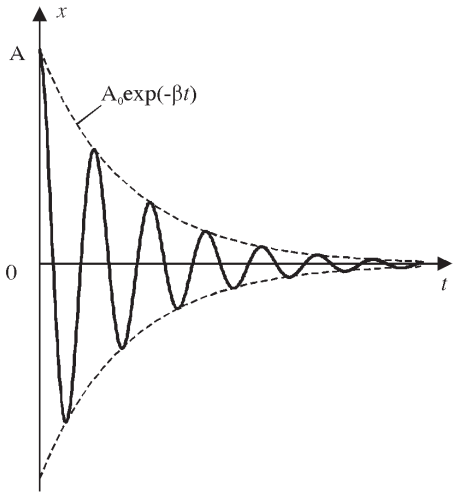
gde je ω_1 kružna frekvencija prigušenih oscilacija. Kada je $\omega^2 - \beta^2 > 0$, frekvencija prigušenih oscilacija ω_1 predstavlja realnu veličinu i rešenje jednačine (12.30) u slučaju malih prigušenja ima sledeći oblik:

$$x = A_o \exp\,(-\beta t)\cos\,(\omega_1 t + \phi), \tag{12.32}$$

gde je

$$A(t) = A_o \exp\,(-\beta t) \tag{12.33}$$

amplituda prigušenih oscilacija, a A_o amplituda u početku posmatranja oscilovanja ($t = 0$). Grafički prikaz funkcije (12.32) dat je na slici 12.11 punom linijom, dok je smanjenje amplitude (izraz 12.33) prikazano na istoj slici isprekidanim linijama. Interval vremena $\tau = 1/\beta$ za koji se amplituda smanji za e ($e = 2,72$) puta od početne vrednosti naziva se *vreme relaksacije*.



Sl. 12.11: Zavisnost elongacije i amplitude prigušenih oscilacija od vremena

Period prigušenih oscilacija zavisi od koeficijenta prigušenja i odredjen je izrazom:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \tag{12.34}$$

Iz izraza (12.34) se vidi da je pri malom prigušenju ($\beta^2 \ll \omega^2$) period prigušenih oscilacija približno jednak periodu neprigušenih oscilacija ($T \approx 2\pi/\omega$). Pri jakom prigušenju, ($\beta^2 > \omega^2$) period oscilovanja je imaginarna jedinica.

Ako su $A(t)$ i $A(t + T)$ amplitude dve uzastopne oscilacije, izmedju kojih je vremenski interval T, tada se odnos $A(t)/A(t + T) = \exp\,(\beta T)$ naziva *dekrement prigušenja*, a njegov logaritam

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \tag{12.35}$$

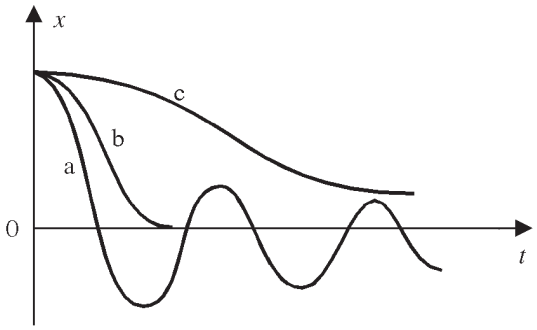
logaritamski dekrement prigušenja. U izrazu (12.35) N predstavlja broj oscilacija koji se izvrši dok amplituda ne opadne za e puta od početne vrednosti.

Za razmatranje prigušenih oscilacija koristi se još jedna veličina koja se naziva *Q-faktor* ili *faktor dobrote*. Ova veličina za male vrednosti logaritamskog dekrementa se može izraziti na sledeći način:

$$Q = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{\omega}{4\pi\beta}. \tag{12.36}$$

Pri jakom prigušenju, ($\beta^2 > \omega^2$) period oscilovanja imaginarna veličina. Takvo kretanje se naziva *aperiodično*.

Na slici 12.12 su dati neki oblici oscilatornog kretanja. Treba naglasiti da neki merni instrumenti sa pokretnim kalemom (analogni voltmetri, ampermetri itd.) rade u režimu kritičnog prigušenja. Pod kritičnim prigušenjem podrazumeva se takvo kretanje oscilatora, kod kog se on, po izvodjenju iz ravnotežnog položaja, za najkraće vreme vraća u taj isti položaj i tu se zaustavlja.



Sl. 12.12: Grafik elongacije u funkciji vremena: a) prigušene oscilacije, b) kritično prigušenje, c) aperiodičan slučaj

12.1.7 Prinudne oscilacije. Rezonancija.

Da bi realni oscilator vršio neprigušene oscilacije neophodno je da mu se izgubljena energija stalno nadoknadjuje. Nadoknadjivanje energije kod mehaničkih oscilacija najčešće vrši neka spoljašnja sila (prinudna sila) koja se menja po sledećem zakonu

$$F = F_o \cos \omega' t, \tag{12.37}$$

gde su F_o i ω' amplituda i kružna frekvencija oscilovanja prinudne sile. Diferencijalna jednačina kretanja oscilatora za ovaj slučaj ima oblik:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_o \cos \omega' t. \tag{12.38}$$

Deljenjem ove jednačine sa m i uvodjenjem smena $\mu/m = 2\beta$ i $F_o/m = f_o$, dobija se nehomogena diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_o \cos \omega' t. \tag{12.39}$$

Rešenje jednačine (12.39) jednako je sumi opšteg rešenja (12.32) jednačine (12.30) za prigušene oscilacije i parcijalnog rešenja nehomogene jednačine. Parcijalno rešenje će biti izraženo u kompleksnom obliku. Desni deo jednačine (12.39) se može zameniti kompleksnom veličinom $f_o \exp(i\omega' t)$, tako da se dobija oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_o \exp(i\omega' t). \tag{12.40}$$

Parcijalno rešenje ove jednačine biće izraženo u obliku:

$$x = x_o \exp(i\eta t).$$

Zamenom izraza za x u jednačinu (12.40) dobija se

$$x_o \exp(i\eta t)(-\eta^2 + 2\beta\eta + \omega^2) = f_o \exp(i\omega' t). \tag{12.41}$$

Kako ova jednakost važi za bilo koji vremenski interval, to se vreme t može eliminisati. Otuda sledi da je $\eta = \omega'$. Zamenom η sa ω' u jednačini (12.41) nalazi se izraz za x_o, i množenjem njegovog brojioca i imenioca sa $(\omega^2 - \omega'^2 - 2i\beta\omega')$ dobija se

$$x_o = \frac{f_o}{(\omega^2 - \omega'^2) + 2i\beta\omega'} = f_o\frac{(\omega^2 - \omega'^2) - 2i\beta\omega'^2}{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}. \tag{12.42}$$

Ovaj kompleksni izraz se može jednostavnije predstaviti u obliku:

$$x_o = A \exp(-i\phi)$$

gde je

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \tag{12.43}$$

i

$$\phi = \arctan(\frac{2\beta\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}). \tag{12.44}$$

Prema tome, rešenje jednačine (12.40) u kompleksnom obliku je:

$$x = A \exp\ [i(\omega' t + \phi)].$$

Njegov realni deo predstavlja rešenje jednačine (12.39), tj.

$$x = A \cos\,(\omega' t + \phi) \tag{12.45}$$

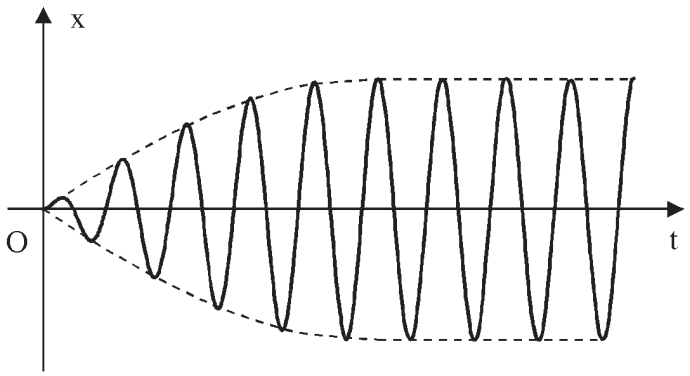
gde su A i ϕ zadati izrazima (12.43) i (12.44), respektivno. Prema tome, parcijalno rešenje nehomogene jednačine (12.39) ima sledeći oblik:

$$x = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}} \cos\,(\omega' t - \arctan\frac{2\beta\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}). \tag{12.46}$$

Rešenje jednačine (12.39) jednako je zbiru opšteg rešenja homogene jednačine

$$x_1 = A_o \exp\ (-\beta t) \cos\,(\omega_1 t + \phi_1) \tag{12.47}$$

(izraz 12.32) i parcijalnog rešenja (12.46). Član (12.47) ima značajnu ulogu samo u početnom stadijumu procesa (pri uspostavljanju oscilovanja), dok amplituda prinudnih oscilacija ne dostigne vrednost odredjenu izrazom (12.43). Grafik prinudnih oscilacija predstavljen je na slici 12.13. Dakle, pri ustaljenom režimu prinudne oscilacije su harmonijske sa frekvencijom ω'. Amplituda i faza ovih oscilacija su odredjene izrazima (12.43) i (12.44) i takodje zavise od ω'.



Sl. 12.13: Zavisnost elongacije od vremena kod prinudnih oscilacija

Kao što se vidi iz izraza (12.43) amplituda A ima složenu zavisnost od koeficijenta prigušenja i kružnih frekvencija slobodnog i prinudnog oscilovanja. Ova amplituda će imati svoj maksimum za odredjenu vrednost ω i β. Da bi se odredila *rezonantna frekvencija* $\omega' = \omega_r$, tj. frekvencija za koju amplituda A dostiže maksimalnu vrednost, potrebno je naći maksimum funkcije (12.43) ili, što je isto, minimum izraza pod korenom. Diferenciranjem izraza pod korenom po ω' i izjednačavanjem dobijenog rezultata sa nulom, dobija se uslov za odredjivanje ω_r

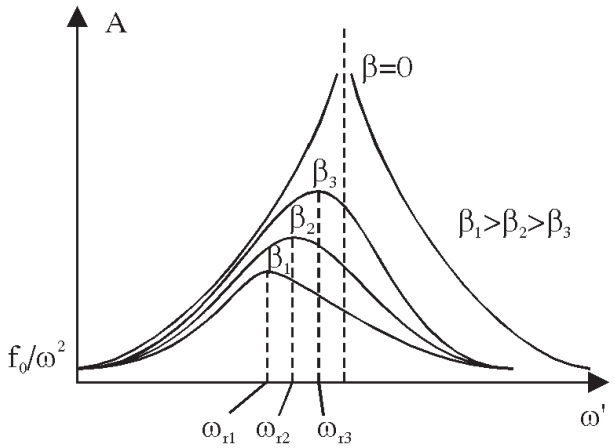
$$-4(\omega^2 - \omega'^2)\omega' + 8\beta^2\omega' = 0. \tag{12.48}$$

Prema tome, za rezonantnu frekvenciju se dobija

$$\omega' = \omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}. \tag{12.49}$$

Zamenom izraza (12.49) u (12.43) dolazi se do vrednosti za amplitudu A_r, u slučaju kada nastupa rezonancija

$$A_r = \frac{f_o}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \tag{12.50}$$



Sl. 12.14: Zavisnost amplitude oscilatora od frekvencije prinudne sile, za različite vrednosti faktora pojačanja

Iz izraza (12.50) se vidi da, u slučaju kada ne postoji otpor sredine ($\beta = 0$), amplituda prinudnih oscilacija pri rezonanciji postaje beskonačna. U tom slučaju iz izraza (12.49) sledi da je $\omega_r = \omega$, tj. rezonancija u sistemu bez prigušenja nastupa onda kada je frekvencija prinudne sile jednaka frekvenciji slobodnih oscilacija. Zavisnost amplitude prinudnih oscilacija od kružne frekvencije prinudne sile za različite vrednosti koeficijenta prigušenja prikazana je na slici 12.14. Sa slike se vidi da se, sa povećanjem koeficijenta prigušenja, maksimum krivih smanjuje i pomera ka manjim vrednostima ω'.

13. Talasno kretanje

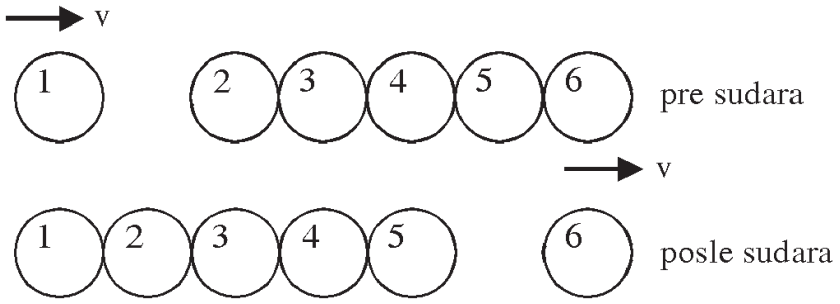
13.1 Nastanak mehaničkih talasa

Ako se jedna čestica (delić) elastične sredine u bilo kom agregatnom stanju izvede iz ravnotežnog položaja, na tom mestu će elastična ravnoteža biti poremećena. U toku vremena, u kome elastične sile uspostavljaju ravnotežu, impuls pokrenute čestice se prenosi na prve susedne, a zatim na sve udaljenije čestice sredine, koje se takodje pomeraju iz svojih ravnotežnih položaja. Tako se prvobitno izazvani impuls može proširiti kroz odredjenu sredinu.

Ako se pomenutoj čestici sredine saopšti samo jedan kratkotrajan impuls, ona se izvede iz ravnotežnog položaja i tada nastaje lokalno zgušnjavanje materijala koje se prostire kroz sredinu. Elastična ravnoteža će se uspostaviti i čestice će se vratiti u ravnotežni položaj najpre na mestu saopštavanja, a zatim će se ravnoteža, tj. stanje mirovanja čestica, uspostaviti sukcesivno u celoj sredini. U ovom slučaju su sve čestice sredine izvele samo kretanje koje odgovara polovini jedne oscilacije. Prostiranje jednog takvog impulsa kroz sredinu i zatim sukcesivno uspostavljanje ravnotežnog položaja čestica vrši se odredjenom brzinom c koja zavisi od osobina sredine. Takva pojava nosi naziv *talasni impuls*. Pod brzinom c se ne sme podrazumevati brzina kretanja čestica v, jer je $c \gg v$.

Ako čestice elastične sredine neprekidno osciluju pod dejstvom neke spoljašnje periodične sile sinusnog karaktera, tada se impuls (poremećaj) i mesta zgušnjavanja i razredjivanja sredine neprekidno šire u prostoru, takodje brzinom c. Dakle, stacionarno prostiranje poremećaja kroz elastičnu sredinu nazvano je *talas* ili *talasno kretanje*, a čestice sredina od koje talas polazi *talasni izvor*.

Prenošenje impulsa može se pratiti na sledećim primerima. Ako se na jednom kraju zategnutog užeta izazove oscilatorno kretanje normalno na njegov pravac, ono će se prenositi duž užeta odredjenom brzinom. Ova pojava se takodje može zapaziti kod niza identičnih kuglica poredjanih u nizu (sl. 13.1). Ako u ovakav niz kuglica odredjenom brzinom, čeono, udari nova kuglica iste mase, posle kratkog vremena kuglica sa kraja niza će se odvojiti i kretati istom brzinom kao upadna, dok će ostale mirovati. Dakle, upadna kuglica je donela sredini (nizu kuglica) odredjeni impuls i taj se impuls proširio kroz sredinu odredjenom brzinom.



Sl. 13.1: Prenošenje impulsa kod reda kuglica

Mehanizam širenja impulsa u nekoj elastičnoj sredini može se objasniti jednostavnim modelom. Poznato je da su molekuli u nekoj sredini vezani medjumolekularnim silama, što se može predstaviti mnoštvom identičnih kuglica, medjusobno povezanih elastičnim oprugama. Ako se jedna kuglica u takvom sistemu izvede iz ravnotežnog položaja, elastične opruge koje je povezuju s drugim kuglicama će se sabiti ili istegnuti. To će usloviti pomeranje okolnih kuglica, koje se prenosi dalje kroz sistem. Brzina i smer kretanja impulsa ne zavise od kretanja pojedinačnih kuglica.

Talasno kretanje je usko povezano sa prostim harmonijskim oscilatornim kretanjem. Kada se talas kreće kroz elastičnu sredinu, svaka čestica te sredine osciluje oko svoga ravnotežnog položaja, tako da se umesto jedne moraju razmatrati oscilacije velikog broja čestica. Brzinu prostiranja talasa treba razlikovati od brzine kretanja čestica te sredine. Naime, pri prostiranju talasa, čestice samo osciluju oko ravnotežnog položaja, a kroz sredinu se prenosi faza oscilovanja, odnosno energija talasnog izvora.

Kada se prostiranje impulsa vrši samo u jednom pravcu, onda se takav talas naziva *linijski talas*. Kada se impulsi prostiru po površini to je *površinski talas*, a ako se prostiru u svim pravcima to je *prostorni talas*. Ako je sredina homogena onda, se impulsi šire u svim pravcima podjednakom brzinom, i takav talas se naziva *sferni*. Površina do koje istovremeno stiže talas od datog izvora čini *talasni front*. Talasni front se može definisati i kao površina na kojoj sve čestice sredine osciluju u istoj fazi. Oblik talasnog fronta zavisi od oblika izvora talasa i sredine u kojoj se talas širi. Ako se radi o tačkastom izvoru, onda će oblik talasnog fronta biti sfera. Ako se izvor talasa nalazi u beskonačnosti, može se smatrati da se radi o ravnom talasni front.

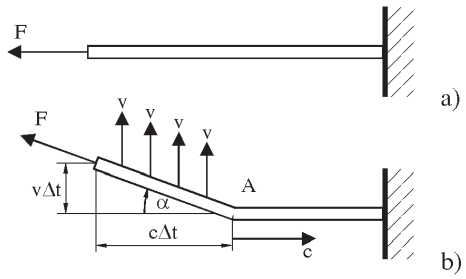
Radi jednostavnijeg prikazivanja sfernih i površinskih talasa uveden je pojam *zraka*. Pod zrakom se podrazumeva uzani snop talasa duž jednog pravca prostiranja i predstavlja se pravom linijom. Kod sfernih talasa zraci predstavljaju poluprečnike r sfera koji su normalni na talasnom frontu.

13.2 Brzina prostiranja impulsa

U homogenoj i izotropnoj elastičnoj sredini impulsi (talas) se prenose u svim pravcima istom brzinom. Ako je pravac prostiranja impulsa normalan na pravac oscilovanja čestica, onda je to *transferzalan* talas, a ako je pravac prostiranja impulsa isti sa pravcem oscilovanja čestica, talas je *longitudinalan*.

13.2.1 Brzina prostiranja transverzalnih impulsa

Neka je, na primer, čelično uže zategnuto silom F (sl. 13.2). Ako se u trenutku $t = 0$ na levom kraju užeta izvrši transverzalna deformacija, usled koje se čestice kreću brzinom v, nakon vremena Δt impuls će stići do tačke A krećući se brzinom c. Tačka A označava granicu izmedju dela užeta koji se kreće i dela koji miruje. Levo od tačke A čestice se kreću srednjom brzinom v, normalno na pravac prostiranja impulsa, a čestice na desnoj strani miruju.



Sl. 13.2: Brzina prostiranja transverzalnog impulsa u zategnutom čeličnom užetu

Komponenta sile F u transverzalnom pravcu je $F_t = F \sin\alpha$. Za mala transverzalna pomeranja ugao α ima malu vrednost, pa je sinus ovoga ugla približno jednak tangensu, tj.

$$\sin\alpha = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c}. \tag{13.1}$$

Impuls komponente sile F_t jednak je

$$F\sin\alpha\Delta t = F\frac{v}{c}\Delta t. \tag{13.2}$$

Promena impulsa dela užeta koji se kreće u transverzalnom pravcu, kao što se sa slike vidi, je mv, pošto je uže u početku mirovalo ($mv_o = 0$). Masa m dela užeta koji se kreće može se izraziti preko linearne gustine μ (masa po jedinici dužine) i dužine $c\Delta t$. Na taj način promena impulsa je $(\mu c\Delta t)v$. Sada se impuls sile F_t može izraziti u obliku:

$$F\frac{v}{c}\Delta t = \mu c\Delta t v, \tag{13.3}$$

odakle se za brzinu prostiranja transverzalnih talasa dobija izraz

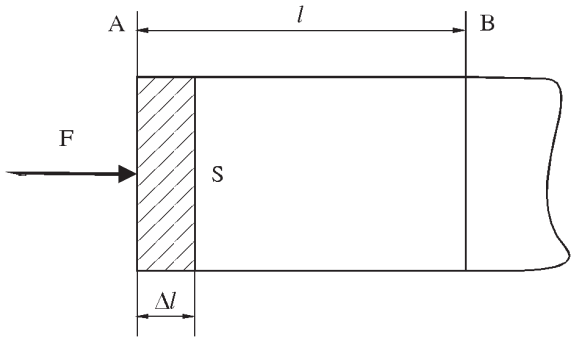
$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{13.4}$$

Iz ovog izraza se vidi da brzina prostiranja transverzalnih impulsa (kao i transverzalnog talasa) ne zavisi od brzine v pomeranja čestica sredine, već samo od sile zatezanja užeta i linearne gustine μ. Impuls se brže prostire ukoliko je uže tanje i sila kojom je uže zategnuto veća.

13.2.2 Brzina prostiranja longitudinalnih impulsa

Posmatraće se štap čiji je modul elastičnosti E_y, površina poprečnog preseka S i gustina ϱ (sl. 13.3). Neka se na kraju elastičnog štapa proizvede impuls sile (na primer udarom čekića u čeonu stranu štapa) $F\Delta t$, pri čemu se on skrati za dužinu Δl. Za vreme Δt impuls se kroz štap prenese na rastojanje l. Srednja brzina v, kojom se vrši deformacija, odnosno pomeranje čeone površine štapa biće data odnosom $v = \Delta l/\Delta t$. U tom slučaju brzina prostiranja impulsa biće $c = l/\Delta t$. Treba naglasiti da je $v \ll c$. Impuls sile $F\Delta t$ sabije štap za dužinu Δl, pri čemu važi Hukov (Hooke) zakon

$$\frac{F}{S} = E_y \frac{\Delta l}{l}. \tag{13.5}$$



Sl. 13.3: Brzina prostiranja longitudinalnih impulsa u štapu

Pošto je masa štapa koja je impulsom pokrenuta $\Delta m = \varrho S \Delta l$, impuls sile može se izraziti u obliku:

$$F\Delta t = \Delta m c. \tag{13.6}$$

Zamenom vrednosti za F iz izraza (13.5) u (13.6), uz korišćenje vrednosti za masu, dobija se da je brzina prostiranja longitudinalnih impulsa

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\varrho}}. \tag{13.7}$$

Ovo je Njutnova jednačina, pomoću koje se može odrediti brzina prostiranja longitudinalnih impulsa (talasa) u čvrstim telima. Za tečnosti, u ovoj jednačni umesto Jungovog (Young) modula elastičnosti E_y figuriše zapreminski modul elastičnosti E_V.

Brzina prostiranja longitudinalnih impulsa u gasovima data je izrazom

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\varrho_t}}, \tag{13.8}$$

gde je p pritisak gasa, κ odnos specifičnih toplotnih kapaciteta pri konstantnom pritisku (c_p) i konstantnoj zapremini (c_V), a ϱ_t gustina gasa na temperaturi t^oC. Sa povećanjem temperature brzina impulsa u gasu se, za razliku od tečnosti, u značajnoj meri povećava. Za $p = const.$, $\varrho_t = \varrho_o/(1 + t_o/273)$, gde je ϱ_o gustina gasa na temperaturi 0^oC. Zamenom izraza za ϱ_t u (13.8) dobija se

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\varrho_o}(1 + \frac{t^oC}{273})} = c_o\sqrt{1 + \frac{t^oC}{273}},$$

gde je $c_o = p\kappa/\varrho_o$ brzina prostiranja impulsa na temperaturi $0^o\,C$.

Brzina prostiranja longitudinalnih impulsa, kao što se vidi iz izraza (13.7) i (13.8), zavisi od osobina materijala.

Važno je napomenuti da se transverzalni impulsi mogu prostirati samo u čvrstim telima (jer ona imaju znatan modul smicanja), a longitudinalni u telima bilo kojeg agregatnog stanja.

13.2.3 Sinusno talasno kretanje

Ako se od oscilatora (izvora talasa) koji vrši proste harmonijske oscilacije one prenose kroz elastičnu sredinu u vidu sinusnih impulsa, onda pojedine čestice sredine do kojih stižu impulsi i same počinju da osciluju prema sinusnom zakonu, po kome se vrši i oscilovanje izvora talasa. Takav talas, kod koga se oscilovanje čestica vrši po sinusnom zakonu, naziva se *sinusni talas*.

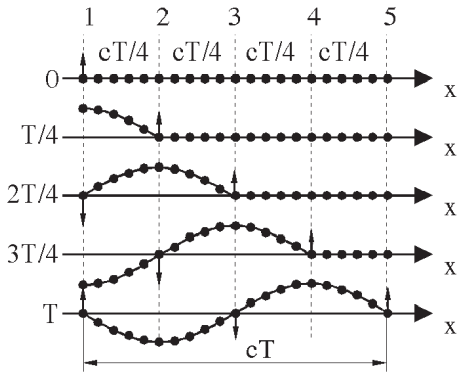
Kao što je već rečeno, impulsi se mogu prostirati transverzalno i longitudinalno, pa se u skladu sa tim mogu obrazovati *transverzalni* i *longitudinalni sinusni talasi*.

Na slici 13.4 data je šema širenja transverzalnih talasa. Pet redova na slici predstavljaju raspored čestica (to može biti, na primer, niz atoma u čvrstom telu) sredine u odredjenim momentima. Brojevi 1,2,3 itd. označavaju čestice koje se nalaze na rastojanjima $cT/4$ (c-brzina prostiranja impulsa i T-period oscilovanja čestica sredine), tj. na rastojanjima koja talas prelazi za četvrtinu perioda kretanja. Prvi red daje položaje čestica u trenutku $t = 0$, kada sve čestice zauzimaju ravnotežne položaje i kada se prvoj čestici saopštava impuls vertikalno naviše (na slici označen strelicom) koji će za sobom povući naredne čestice u nizu. Posle $t = T/4$ čestica 1 dostiže krajnji gornji položaj (amplituda njenog oscilovanja), pri čemu se istovremeno čestici 2 saopšti impuls vertikalno naviše. Po isteku $t = T/2$ čestica 1 prolazi kroz ravnotežni položaj sa smerom kretanja nadole, čestica 2 dostiže krajnji gornji položaj, a čestica 3 počinje da se kreće nagore iz ravnotežnog položaja, pošto je pogodjena impulsom, itd. Za vreme $t = T$ čestica 1 izvrši jednu punu oscilaciju zauzevši položaj koji je imala u početku kretanja. Talas za to vreme predje put cT pogadjajući česticu 5.

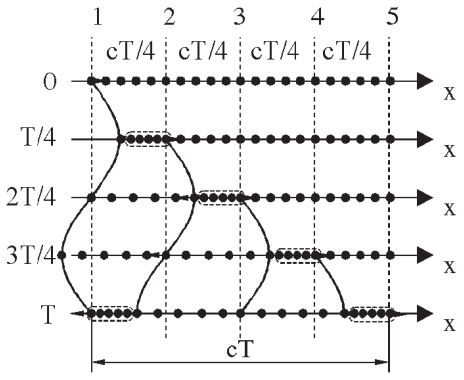
Na slici 13.5 data je šema širenja longitudinalnih talasa. Sva razmatranja transverzalnih talasa mogu se primeniti i na longitudinalne talase (prepušta se čitaocu). Razlika je samo u tome što kod longitudinalnih talasa čestice sredine osciluju u pravcu prostiranja impulsa. Sa slike se vidi da se pri širenju longitudinalnih talasa vrši naizmenično zgušnjavanje (oblasti okružene na slici) i razredjivanje sredine. Proces širenja talasa je praćen pomeranjem oblasti zgušnjavanja i razredjivanja sredine.

Za vreme T od početka oscilovanja tačkastog izvora (čestica 1 na sl. 13.2), za koje je on izvršio punu oscilaciju, impuls je prešao rastojanje λ. Ovo rastojanje naziva se *talasna dužina*

$$\lambda = cT. \tag{13.9}$$



Sl. 13.4: Šema prostiranja transferzalnih talasa



Sl. 13.5: Šema prostiranja longitudinalnih talasa

Sa slika 13.4 i 13.5 se vidi da je talasna dužina najmanje udaljenje izmedju dve ma koje susedne čestice duž pravca prostiranja talasa, koje osciluju sa faznom razlikom od 2π. Zamenom T sa $1/\nu$ u izraz

(13.9), gde je ν frekvencija oscilovanja izvora, dobija se za brzinu prostiranja talasa

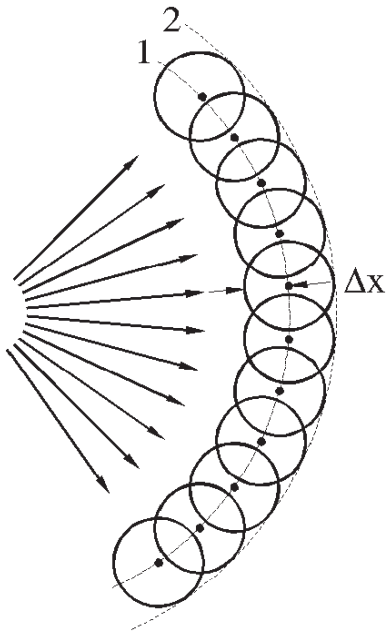
$$c = \lambda\nu.$$

Dakle, brzina prostiranja talasa jednaka je proizvodu talasne dužine i frekvencije oscilovanja čestica.

13.3 Hajgensov princip

Često se prostiranje talasa tretira kao formiranje novog talasnog fronta u datom momentu od talasnog fronta formiranog u predhodnom momentu. Ovo se može objasniti pomoću *Hajgensovog* (Huygens) *principa*. Neka se talasni front kreće kroz homogenu sredinu i u nekom momentu zauzima položaj 1 (sl. 13.6). Treba naći njegov položaj posle nekog vremenskog intervala Δt. Saglasno Hajgensovom principu, *svaka tačka sredine do koje je stigao talas postaje izvor sekundarnih talasa*. To znači da se od svake tačke do koje stigne talas šire novi sferni talasi. Da bi se definisali sekundarni talasi, oko tačaka početnog talasnog fronta 1 treba opisati sfere poluprečnika

$$x = c\Delta t.$$



Sl. 13.6: Način prostiranja talasnog fronta po Hajgensovom principu

Prema Hajgensovom principu, sekundarni talasi se medjusobno poništavaju u svim pravcima, osim u pravcu širenja talasa. Drugim rečima, novi talasni front se formira po spoljašnjoj obvojnici sekundarnih talasa. Na taj način je odredjen položaj 2 talasnog fronta.

Hajgensov princip može se primeniti i za disperzione sredine. U tom slučaju brzine talasa c, a samim tim i x, su različite u različitim pravcima.

Na osnovu Hajgensovog principa mogu se objasniti pojave odbijanja, prelamanja i difrakcija talasa.

13.4 Jednačina progresivnog talasa

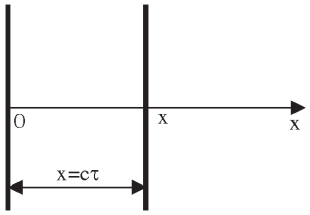
Pod progresivnim talasom podrazumeva se takav talas koji se prostire u istom pravcu i smeru, idealno uzev, do kraja elastične sredine. U stvari, energija koju prenosi talas predaje se sredini, pri čemu opada amplituda talasa. Tamo gde amplituda postane jednaka nuli prestaje širenje talasa.

Da bi se došlo do jednačine progresivnog talasa, čiji parametri zavise od koordinata prostora i od vremena, razmatraće se ravni sinusni talas. Neka se talas prostire duž x-ose. Tada će talasni front biti

normalan na x-osu, pa će sve tačke na talasnom frontu oscilovati u istoj fazi. Takve oscilacije se mogu, bez obzira kakav se talas obrazuje, predstaviti poznatim sinusnim zakonom za prosto harmonijsko oscilovanje (12.1), gde će elongacija zavisiti samo od x i t, tj. $y = y(x, t)$.

Oscilovanje čestica koje leže u ravni $x = 0$ (sl. 13.7) može se opisati jednačinom:

$$y(0, t) = A \sin \omega t. \tag{13.10}$$



Sl. 13.7: Položaj talasnog fronta u početku posmatranja ($t = 0$) i posle nekog vremena τ

Potrebno je da se nadje jednačina oscilovanja čestica u ravni kojoj odgovara proizvoljna vrednost x. Da bi talas prešao put od ravni $x = 0$ do ravni na rastojanju x potrebno je da protekne vreme $\tau = x/c$. To znači da će oscilovanje čestica u ravni x kasniti u odnosu na oscilovanje čestica u ravni $x = 0$ za vreme τ, zbog konačnosti brzine prostiranja talasa, pa jednačina oscilovanja u ravni x ima oblik:

$$y(x, t) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - \frac{x}{c}), \tag{13.11}$$

gde je A amplituda talasa, a ω kružna frekvencija. Jednačina (13.11) se naziva *jednačina progresivnog talasa*. Ovo važi za slučaj kada pri širenju talasa nema predavanja energije elastičnoj sredini. Treba napomenuti da se u početku energija predaje sredini dok počne da osciluje.

Kako je $\omega = 2\pi/T$ i $c = \lambda/T$, jednačina (13.11) može se napisati u sledećem obliku:

$$y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) = A \sin(\omega t - kx). \tag{13.12}$$

Ako je početna faza ϕ onda jednačina (13.12) dobija sledeći oblik:

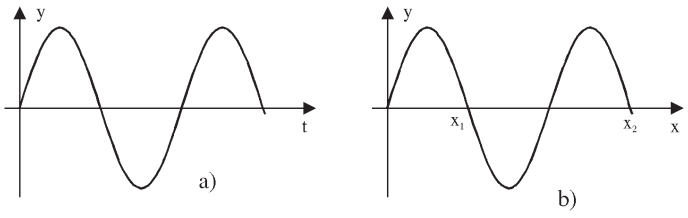
$$y = A \sin(\omega t - kx + \phi), \tag{13.13}$$

gde je

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \tag{13.14}$$

talasni broj.

Pošto se u jednačini (13.12) nalaze dve nezavisno promenljive veličine (x i t), pojava talasnog kretanja može se pratiti ili posmatranjem elongacije u toku vremena u jednoj tački prostora, ili posmatranjem raspodele faze oscilacije u prostoru u odredjenom momentu. Grafički prikaz jednačine (13.12) dat je na slici 13.8.



Sl. 13.8: Grafički prikaz jednačine (13.12)
a) elongacija odredjene tačke proetoru u funkciji vremena
b) elongacija u funkciji koordinate x u momentu t

Neka je fazna razlika u tačkama x_1 i x_2 (sl. 13.8b)

$$\Delta\phi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}) - 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Ako je $\Delta\phi = n2\pi$, čestice sredine će oscilovati u fazi. Rastojanje izmedju čestica sredine je

$$x_2 - x_1 = n\lambda, \tag{13.15}$$

gde je $n = 1, 2, 3,....$ Za $n = 1$ rastojanje $x_2 - x_1$ jednako je talasnoj dužini λ, tj.

$$x_2 - x_1 = \lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Ovo je već poznati izraz za talasno kretanje.

Čestice sredine će oscilovati u suprotnim fazama ako je fazna razlika

$$\Delta\phi = (2n + 1)\pi, \tag{13.16}$$

gde je $n = 0, 1, 2,...$, odnosno ako se čestice sredine nalaze na rastojanjima

$$x_2 - x_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{13.17}$$

Za n=0 to rastojanje je

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}. \tag{13.18}$$

Uslov za konstantnost faza u toku vremena svodi se na uslov da argument sinusa u izrazu (13.11) bude konstantan, tj.

$$\omega(t - \frac{x}{c}) + \phi = const.$$

Diferencranjem ovog izraza po t dobija se

$$\frac{dx}{dt} = c. \tag{13.19}$$

Dakle, c predstavlja brzinu kojom se kreće površina istih faza, tj. brzinu širenja talasa, i naziva se *fazna brzina*.

Analognim postupkom kao za ravne talase može se pokazati da se kretanje sfernog sinusnog talasa može prikazati jednačinom

$$y = \frac{A_o}{r}\sin(\omega t - kx), \tag{13.20}$$

gde je A_o konstantna veličina, a r rastojanje od centra talasa do razmatrane tačke sredine. Dakle, za slučaj sfernog talasa, čak i u sredinama koje ne apsorbuju energiju, amplituda oscilovanja ne ostaje konstantna, već se smanjuje sa rastojanjem od izvora po zakonu $1/r$. Jednačina (13.20) važi samo za vrednost r koja je znatno veća od dimenzija izvora (kada se izvor talasa može smatrati tačkastim).

Iz izraza (13.14) sledi

$$c = \frac{\omega}{k}, \tag{13.21}$$

tj. fazna brzina sinusnih talasa zavisi od njihove frekvencije. Ova pojava se naziva *disperzija* talasa, a sredina u kojoj se javlja disperzija naziva se *disperziona sredina*.

Jednačina (13.12) važi za slučaj kada amplituda ne zavisi od koordinate x. To znači da talas ne predaje svoju energiju sredini kroz koju se širi. Ako talas pri širenju predaje svoju energiju sredini njegov, intenzitet se smanjuje (nastaje poništavanje talasa). Eksperimentalno je pokazano da se amplituda tog talasa smanjuje po zakonu $A = A_o\exp(-\beta x)$ (izraz 12.33), pa se jednačina ravnih talasa može napisati u obliku:

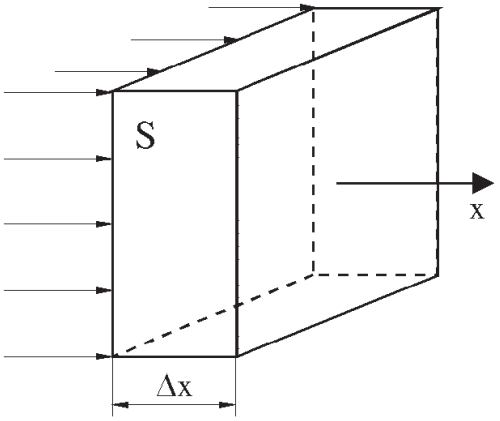
$$y = A_o\exp(-\beta x)\sin(\omega t - kx), \tag{13.22}$$

gde je A_o amplituda čestice u ravni $x = 0$ (sl. 13.7).

13.5 Prenošenje energije talasima

Proces širenja talasa, u bilo kojoj elastičnoj sredini, praćen je prenošenjem energije tim talasima. Neka je S površina dela fronta ravnih talasa u trenutku t (sl. 13.9). Posle vremena Δt ovaj front će se pomeriti za rastojanje $\Delta x = c\Delta t$, pri čemu će sve čestice sredine u zapremini $S\Delta x$ vršiti oscilatorno kretanje. Neka je w energija oscilovanja čestica sredine koje se nalaze u jedinici zapremine. Smatraće se da je zapremina $S\Delta x$ veoma mala, pa je u oblasti te zapremine energija w svuda ista. Tada će za vreme Δt sredina zapremine $S\Delta x$ primiti kroz površinu S energiju $wS\Delta x$. Dakle, za interval vremena Δt kroz površinu S će se preneti energija

$$\Phi = \frac{wS\Delta x}{\Delta t} = wSc, \tag{13.23}$$



Sl. 13.9: Prostiranje dela fronta ravnih talasa

gde je c brzina širenja talasa. Veličina Φ se naziva *energetski fluks* (protok) *talasa* i izražava se u vatima. *Intenzitet* ili *jačina talasa* I (jačina energetskog fluksa) predstavlja energiju koja se u jedinici vremena prenese kroz površinu normalnu na pravac prostiranja talasa, tj.

$$I = \frac{\Phi}{S} = wc. \tag{13.24}$$

Pošto je brzina širenja talasa vektorska veličina to je i intenzitet talasa vektorska veličina i naziva se *Umov vektor*.

Intenzitet talasa izražava se u W/m^2. Kod sfernih talasa koji potiču od talasnog izvora intenzitet talasa se smanjuje sa kvadratom rastojanja r od izvora talasa. Neka tačkasti izvor u svakoj sekundi emituje kroz elastičnu sredinu energiju E_1. Ova energija će se ravnomerno rasporedjivati po sfernoj površini $S = 4\pi r^2$ fronta talasa. Stoga je $I = E_1/4\pi r^2$, tj $I \sim 1/r^2$. Ovaj izraz, kao i izraz (13.24), je primenljiv samo za sredine u kojima nema pretvaranja energije oscilatornog kretanja u druge oblike energije (na primer toplotnu).

Potrebno je da se nadje veza izmedju intenziteta talasa I, maksimalne brzine koju dostiže čestica u toku oscilovanja (amplituda brzine) v_o i brzine širenja talasa c. Zato će se razmotriti zapremina elastične sredine, čije su dimenzije manje od talasne dužine λ, talasa tako da se u oblasti te zapremine može smatrati da sve čestice osciluju istom frekvencijom i amplitudom. Neka je masa jedne čestice m, a njihov broj u jedinici zapremine n. Tada se ukupna energija oscilovanja čestica koje se nalaze u jedinici zapremine, saglasno (12.27), može napisati u obliku

$$w = n\frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{\varrho v_o^2}{2}, \tag{13.25}$$

gde je $\varrho = nm$ gustina sredine, A amplituda oscilovanja, a ω kružna frekvencija oscilovanja čestica.

Zamenom izraza (13.25) u (13.24) za intenzitet talasa dobija se sledeći izraz:

$$I = \frac{\varrho v_o^2}{2}c. \tag{13.26}$$

Kao što je već naglašeno, intenzitet sfernog talasa se smanjuje sa kvadratom rastojanja od izvora talasa. Prema tome, amplituda oscilovanja čestica A opada sa prvim stepenom tog rastojanja.

Pri širenju talasa u nekoj elastičnoj sredini dolazi do apsorbcije njegove energije, što uslovljava pretvaranje mehaničke energije u toplotu.

Neka je intenzitet ravnih talasa, koji se šire duž x-ose, u tački $x = 0$ jednak I_o. Pri prolasku kroz sloj debljine dx intenzitet talasa se smanji za dI. Tada je

$$dI = -\mu I dx,$$

ili

$$I = I_o \exp(-\mu x), \tag{13.27}$$

gde je I intenzitet talasa posle prolaska kroz sloj debljine dx. Veličina μ se naziva *koeficijent apsorpcije* enegije talasa u datoj sredini. Pošto je energija talasa proporcionalna kvadratu amplitude čestica to se pri prolazu kroz sloj debljine x ona smanjuje po zakonu

$$A_{ox} = A_o \exp(-\beta x). \tag{13.28}$$

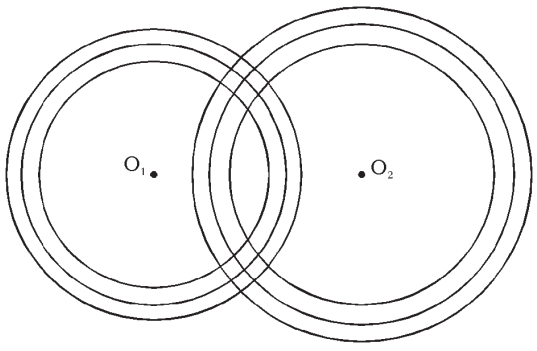
Za promenu pritiska sredine pri širenju talasa važi sledeći izraz:

$$\Delta p = \Delta p_o \exp(-\beta x), \tag{13.29}$$

gde je β *koeficijent prigušenja* oscilovanja čestica sredine. Za vazduh i neke druge gasove $\beta \approx 2 \cdot 10^{-11} \nu^2\, s^2 m^{-1}$ ($\nu = 1/T$-frekvencija oscilovanja), a za vodu (do $\nu = 10^6\, Hz$) $\beta \approx 3 \cdot 10^{-14}\, \nu^2\, s^2 m^{-1}$, tj. β je oko 700 puta manje u vodi nego u vazduhu. Na primer, amplituda ultrazvučnih oscilacija sa frkvencijom $\nu = 10^6\, Hz$ smanji se $e = 2,72$ puta u vazduhu na rastojanju od $0,05\, m$, a u vodi za isto toliko puta na rastojanju od $33,4\, m$. Ovim se objašnjava velika primena ultrazvučnih talasa, pored ostalog, za ultrazvučnu lokaciju, što je detaljno opisano u odeljku (3.10).

13.6 Interferencija talasa

Ako se vrhovima dva štapa istovremeno dodirne mirna površina vode, od tih mesta će se nezavisno širiti talas u obliku koncentričnih krugova (sl. 13.10).



Sl. 13.10: Širenje talasa iz dva izvora

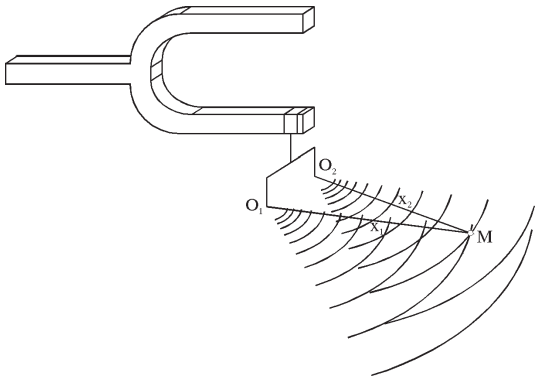
Iako se talasi, koji potiču od dva mesta dodira (talasna izvora), medjusobno poklapaju, u odredjenim tačkama, oni će se dalje širiti nezavisno jedan od drugog kao da se nisu sreli. U oblasti poklapanja talasa oscilacije čestica se superponiraju jedna na drugu, vrši se *interferencija* ili *slaganje* talasa, i kao rezultat toga na nekim mestima čestice sredine mogu oscilovati sa većom amplitudom, a na nekim sa manjom amplitudom. Da bi se našlo rezultujuće pomeranje neke čestice koja je pogodjena talasima, potrebno je naći njeno pomeranje izazvano svakim talasom posebno, a zatim ih složiti skalarno, ako se ta pomeranja vrše u istom pravcu, ili vektorski, ako se ona vrše u različitim pravcima. Najčešće se posmatra interferencija *koherentnih talasa*. Pod koherentnim talasima se podrazumevaju oni talasi čije su frekvencije iste i koji imaju konstantnu faznu razliku. Izvori koherentnih talasa se najlakše mogu

dobiti ako se medjusobno povežu tako da zajednički osciluju. Na primer, dva medjusobno spojena štapa, povezana sa jednim krajem zvučne viljuške, čiji su slobodni krajevi zaronjeni u vodu (sl. 13.11). Neka rezultujuće oscilovanje nastaje u tački M. Rastojanje tačke M od izvora O_1 jenako je x_1, a od izvora O_2, x_2. Posmatraće se slučaj kada su početne faze jednake nuli. Jednačina talasa u tački M koji potiču od izvora O_1 i O_2, saglasno izrazu (13.12), su

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}), \tag{13.30}$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}), \tag{13.31}$$

gde su A_1 i A_2 amplitude talasa u tački M. Ako je razlika $x_1 - x_2$ veoma mala može, se uzeti da su amplitude talasa jednake, tj. $A_1 = A_2 = A$.



Sl. 13.11: Interferencija dva koherentna talasa

Rezultujuća elongacija čestice u tački M biće jednaka zbiru elongacija koje pojedinačno izazivaju ovi talasi, tj.

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi(\frac{x_1 - x_2}{2\lambda}) \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}),$$

ili

$$y = B \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}) \tag{13.32}$$

gde je

$$B = 2A \cos 2\pi(\frac{x_1 - x_2}{2\lambda}) \tag{13.33}$$

amplituda rezultujućeg oscilovanja.

Iz izraza (13.32) se vidi da tačka M harmonijski osciluje sa istim periodom kao i izvori talasa O_1 i O_2. Amplituda rezultujućeg oscilovanja A zavisiće od razlike rastojanja tačke M od izvora talasa O_1 i O_2, koja se naziva *putna razlika*. Ako je ova putna razlika $x_1 - x_2$ jednaka celom broju talasnih dužina

$$x_1 - x_2 = n\lambda, \tag{13.34}$$

gde je $n = 0, 1, 2,...$, onda je za $A_1 = A_2 = A$

$$B = 2A. \tag{13.35}$$

Dakle, amplituda rezultujućeg oscilovanja se udvostručuje u odnosu na amplitudu pojedinačnog talasa. Kaže se da se talasi maksimalno pojačavaju.

Ako je putna razlika jednaka neparnom broju polovina talasne dužine

$$x_1 - x_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \tag{13.36}$$

gde je $n = 0, 1, 2,...$, tada je za $A_1 = A_2 = A$

$$B = 0, \tag{13.37}$$

tj. ako je amplituda oscilovanja čestice pogodjene ovim talasima jednaka nuli, kaže se da se talasi poništavaju (gase).

U slučaju da su amplitude A_1 i A_2 različite u tačkama koje zadovoljavaju uslov (13.34), rezultujuća amplituda biće takodje jednaka njihovom zbiru. U tačkama koje zadovoljavaju uslov (13.36) neće nastati potpuno poništavanje talasa, već će amplitude rezultujućeg oscilovanja čestice dostići najmanju moguću vrednost, jednaku $|A_1 - A_2|$. U ostalim tačkama sredine, u zavisnosti od putne razlike talasa, rezultujuća amplituda može imati različite vrednosti pri, čemu se ona kontinualno menja u granicama od $|A_1 - A_2| \leq B \leq A_1 + A_2$. Na analogan način bi se mogla razmatrati interferencija većeg broja koherentnih talasa koji potiču iz različitih izvora.

13.7 Stojeći talasi

Poseban slučaj interferencije talasa predstavlja *stojeći talas*. Stojeći talas se obrazuje pri susretu dva progresivna talasa jednakih frekvencija i amplituda, a suprotnih smerova kretanja.

Neka se duž x-ose sreću dva talasa, koja zadržavaju istu frekvenciju i amplitudu (talasi ne predaju energiju sredini kroz koju se kreću). Početna koordinata se obično bira u tački u kojoj oba talasa imaju početne faze jednake nuli. Tada će odgovarajuće jednačine talasa koji se šire duž pozitivnog smera x-ose i talasa koji se šire u suprotnom smeru imati sledeći oblik:

$$\begin{aligned} y_1 &= A\sin(\omega t - kx) \\ y_2 &= A\sin(\omega t + kx). \end{aligned} \tag{13.38}$$

Jednačina rezultujućeg oscilovanja (talasa) biće

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos kx \sin\omega t = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin\omega t. \tag{13.39}$$

Iz jednačine (13.39) se vidi da u svakoj tački stojećeg talasa nastaje oscilovanje iste frekvencije sa amplitudom $B_s = |2A\cos(2\pi x/\lambda)|$, koja zavisi od koordinate x razmatrane tačke.

U tačkama sredine za koje je

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi, \tag{13.40}$$

gde je $n = 0, 1, 2,...$, amplituda stojećeg talasa dostiže svoj maksimum $B_s = 2A$.

U tačkama

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}, \tag{13.41}$$

gde je $n = 0, 1, 2,...$, amplituda stojećeg talasa je $B_s = 0$.

Tačke, u kojima su amplitude stojećih talasa maksimalne ($B_s = 2A$) nazivaju se *trbusi stojećeg talasa*, a tačke u kojima su amplitude stojećeg talasa jednake nuli ($B_s = 0$), nazivaju se *čvorovi stojećeg talasa*.

Iz izraza (13.40) i (13.41) mogu se dobiti odgovarajuće koordinate trbuha x_t i čvorova x_c stojećeg talasa

$$x_t = \frac{n\lambda}{2}, \tag{13.42}$$

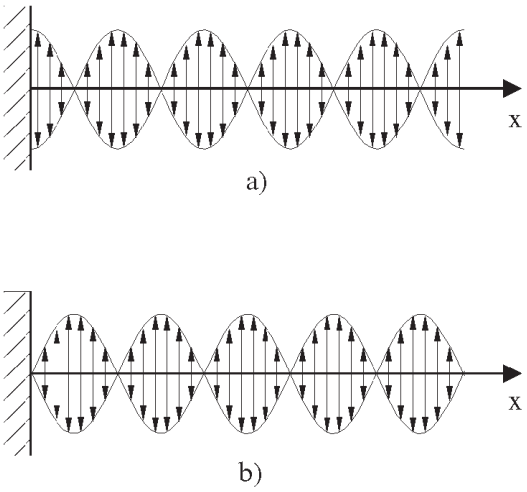
$$x_c = (2n+1)\frac{\lambda}{4}. \tag{13.43}$$

Iz izraza (13.42) i (13.43) se vidi da je rastojanje izmedju dva susedna trbuha ili čvora jednako $\lambda/2$, a rastojanje izmedju trbuha i čvora $\lambda/4$.

Za razliku od progresivnih talasa kod kojih sve čestice osciluju sa jednakim amplitudama, ali sa fazom koja kasni (kod progresivnih talasa faza oscilovanja zavisi od koordinate x posmatrane tačke), sve tačke stojećeg talasa izmedju dva čvora osciluju sa različitim amplitudama, ali sa jednakim fazama (argument sinusa u izrazu (13.39) ne zavisi od x). Sa druge strane čvora amplituda B_s menja znak, pri čemu se faza oscilovanja razlikuje za π. Dakle, čestice koje se nalaze na različitim stranama čvora oscilovaće sa suprotnim fazama.

Najjednostavniji način obrazovanja stojećih talasa nastaje pri interferenciji upadnog i odbijenog talasa. Na primer, interferencijom upadnog talasa, proizvedenog na jednom kraju zategnute žice, i odbijenog na njenom drugom kraju, nastaje stojeći talas. Na krajevima gde je žica zategnuta obrazuju ce se čvorovi stojećeg talasa.

Na mestima gde nastaje odbijanje talasa mogu se, pored čvorova, obrazovati trbusi stojećeg talasa, što zavisi od odnosa gustina sredine u kojoj se talas širi i sredine od koje se odbija. Ako je gustina sredine od koje se vrši odbijanje talasa manja od gustine sredine kroz koju se talasi šire, na mestima odbijanja se obrazuju trbusi stojećeg talasa (sl. 13.12a). Ako je gustina sredine od koje se vrši odbijanje talasa veća od gustine sredine kroz koju se talas širi, na mestima odbijanja se obrazuju čvorovi stojećeg talasa (sl. 13.12b).



Sl. 13.12: Stojeći talasi za slučaj kada je
a) gustina sredine od koje se vrši odbijanje talasa manja od gustine sredine kroz koju se talas širi
b) gustina sredine od koje se vrši odbijanje talasa veća od gustine sredine kroz koju se talas širi

Kada se talas odbija od sredine čija je gustina veća od gustine sredine u kojoj se kreće, dolazi do promene faze za π. Na tim mestima nastaje složeno oscilovanje čestica suprotnog pravca, što ima za posledicu obrazovanje čvorova stojećeg talasa. Ako se talas odbija od sredine manje gustine, nema promene faze, pa na mestima odbijanja nastaje sabiranje oscilacija čestica sa istom fazom, što uslovljava pojavu trbuha stojećeg talasa. Rastojanje izmedju bilo koja dva čvora naziva se *rezonantna šupljina* (rezonantni interval).

Za razliku od progresivnog talasa, stojeći talasi ne prenose energiju. Ukupna energija oscilovanja bilo kog elementa sredine, koji je ograničen čvorom ili trbuhom, ne zavisi od vremena. Ona samo periodično prelazi iz kinetičke u potencijalnu energiju elastične deformacije sredine i obrnuto. Dakle, stojeći talas poseduje energiju ali je ne prenosi iz jedne tačke sredine u drugu.

Dosadašnja razmatranja su se odnosila na dobijanje transverzalnih stojećih talasa. Na sličan način se mogu obrazovati i longitudinalni stojeći talasi.

13.8 Odbijanje (refleksija) talasa

Jednostavan oblik odbijanja talasa nastaje na nekoj ravnoj površini. Pod ravnom površinom se podrazumeva ona površina čije su neravnine manje od talasne dužine talasa koji nailazi na nju. Od takve površine se vrši pravilno odbijanje talasa. Ako su neravnine veće od talasne dužine, talas se deli na veliki broj talasa, koji se od ove površine odbijaju u svim pravcima (difuzno odbijanje).

Na slici 13.13 prikazano je odbijanje fronta talasa od ravne površine. Front ravnih talasa ABD u momentu t nailazi na graničnu površinu SS' od koje se odbija. Prava $B'D'$ prikazuje njegov položaj posle nekog vremenskog intervala Δt. Normala BB' na upadni front talasa predstavlja pravac prostiranja upadnog talasa i sa normalom N' na površinu SS' u tački B' zaklapa upadni ugao α. Znači, talasni front ABD najpre pogadja ravnu površinu u tački A. Po Hajgensovom principu, tačka A postaje izvor novih elementarnih talasa. Kako talas ne može da predje u drugu sredinu, odnosno može samo da se odbije, on se vraća nazad u vidu sfernih talasa. Dok deo talasnog fronta iz tačke B stigne do granične površine, deo

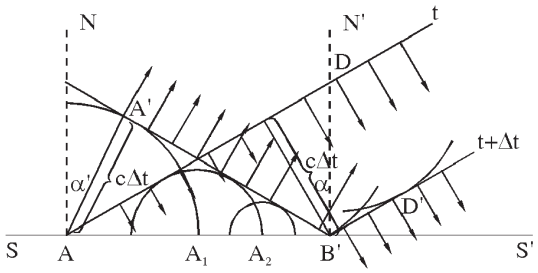
odbijenog talasnog fronta iz tačke A prelazi put jednak $AA' = c\Delta t$. Ova duž je jednaka duži BB'. To znači da su putevi oba talasa isti, što je i razumljivo, pošto se talasi iz tačke A i B prostiru u istoj sredini. Ako se razmotre odbijeni talasi iz drugih tačaka (A_1, A_2) izmedju A i B', dobiće se reflektovani talasni front $A'B'$, koji u stvari predstavlja obvojnicu elementarnih talasa sa pomenutih delića na graničnoj površini. Normala AA' na obvojnicu (tangentu) $A'B'$ predstavlja pravac kretanja odbijenog talasa i sa normalom N na površinu SS' u tački A zaklapa ugao α', koji se naziva odbojni ugao. Pravougli trouglovi $AA'B'$ i ABB' su podudarni, odakle sledi da je

$$90 - \alpha = 90 - \alpha',$$

odnosno

$$\alpha = \alpha'. \tag{13.44}$$

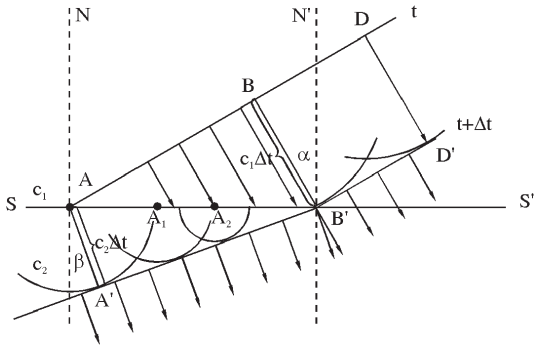
Dakle, *upadni ugao jednak je odbojnom uglu.*



Sl. 13.13: Odbijanje talasa od ravne površine

13.9 Prelamanje (refrakcija) talasa

Kada talasni front naidje na graničnu površinu koja razdvaja dve sredine u kojima je brzina prostiranja talasa različita, pri prelazu u drugu sredinu dolazi do promene njegovog pravca kretanja. Neka ravni talasni front prelazi iz sredine u kojoj se kretao brzinom c_1 u sredinu u kojoj je brzina kretanja c_2, pri čemu je $c_1 > c_2$ (sl. 13.14). Prava ABD predstavlja položaj ravnog talasnog fronta u momentu t. Normala BB' pokazuje pravac prostiranja nailazećeg fronta talasa na graničnu površinu SS'. Ugao α izmedju normale BB' na nailazeći front talasa i normale N' na graničnu površinu S' naziva se *upadni ugao.* Da deo talasa iz tačke B stigne do granične površine (u tački B') potrebno je izvesno vreme Δt. Put BB', s obzirom da je brzina talasa c_1 konstantna u prvoj sredini je $BB' = c_1\Delta t$. Za isto vreme, elementarni talas iz tačke A, na osnovu Hajgensovog principa, prelazi u drugoj sredini put $AA' = c_2\triangle t$, koji je nešto manji zbog manje brzine prostiranja talasa c_2. Ako se razmotre prelomljeni talasi iz tačaka (A_1A_2) izmedju A i B, dobiće se prelomljeni talasni front $A'B'$, koji predstavlja obvojnicu elementarnih talasa od pomenutih tačaka na graničnoj površini SS'. Normala AA' na obvojnicu $A'B'$ predstavlja pravac prostiranja talasnog fronta i sa normalom N na površinu SS' u tački A zaklapa ugao β koji se naziva *prelomni ugao.*



Sl. 13.14: Prelamanje talasa

Pravougli trouglovi ABB' i $AA'B'$ imaju zajedničku hipotenuzu AB'. Iz ovih trouglova se dobija

$$\sin\alpha = \frac{c_1\Delta t}{AB'}; \quad \sin\beta = \frac{c_2\Delta t}{AB'},$$

odnosno

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}, \tag{13.45}$$

gde je n_{12} relativni indeks prelamanja druge sredine u odnosu na prvu.

Izraz (13.45) predstavlja Snelijus (Snell)–Dekartov (Descartes) zakon prelamanja talasa koji glasi: *odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla je jednak odnosu brzina prostiranja talasa u tim sredinama.*

14. Akustika

14.1 Osnovne karakteristike zvuka

Akustika je nauka o zvuku. Mehaničke oscilacije koje se prostiru u elastičnoj sredini (čvrstoj, tečnoj ili gasovitoj), a zapažaju se čulom sluha, nazivaju se *zvučni talasi*. Ljudsko uho registruje zvučne talase čije su frekvencije približno od $20\,Hz$ do $20\,kHz$. Talasi sa frekvencijom manjom od $20\,Hz$ nose naziv *infrazvuk*. Infrazvuk se javlja pri raznim drhtajima, zemljotresima, potresima koji su posledica saobraćaja itd. Zvuk sa frekvencijama iznad $20\,kHz$ naziva se *ultrazvuk*. Ultrazvučni talasi se mogu proizvesti pomoću električnih i magnetnih metoda. Neke životinje mogu proizvesti i registrovati ultrazvuk. Tako na primer, delfini i kitovi mogu registrovati ultrazvuk do $30\,kHz$. Slepi miševi emituju ultrazvuk koji im služi da se u potpuno mračnoj prostoriji orijentišu. Te životinje, dok lete, u odredjenom vremenskom intervalu emituju ultrazvučne signale u trajanju od oko $0,01\,s$, sa frekvencijom izmedju 50 i $80\,kHz$ i zatim osluškuju eho sa najbližih reflektujućih površina. Po vremenu za koje se odjek vraća i po pravcu tog reflektujućeg zvuka slepi miš zaključuje o tome u kom pravcu i na kom odstojanju su prepreke i tako slobodno leti bez opasnosti od udara u zidove ili druge predmete. Ultrazvuk sa frekvencijom reda GHz i većom naziva se *hiperzvuk*. Gornjoj granici frekvencije ultrazvuka (u kristalima je $10^{12} - 10^{13}\,Hz$) odgovara frekvencija čija je talasna dužina reda medjuatomskog rastojanja u kristalu. Isto ograničenje kod vazduha predstavlja red veličine srednje dužine slobodnog puta molekula.

Osetljivost ljudskog uha zavisi od frekvencije zvuka. Ona je maksimalna za frekvencije zvuka od $1,5$ do $3\,kHz$.

U tečnostima i gasovima se mogu prostirati samo longitudinalni zvučni talasi, dok se u čvrstim telima mogu prostirati i longitudinalni i transverzalni zvučni talasi. U bezvazdušnom prostroru se zvučni talasi ne mogu prostirati.

Različita tela različito prenose zvuk, tj. imaju različitu *zvučnu provodnost*. Na primer, meka i porozna tela slabo provode zvuk, pa se koriste kao zvučni izolatori.

Zvuk koji se registruje čulom sluha deli se na *ton* i *šum*. Ton u izvesnom smislu ima pravilne oscilacije, odnosno odredjenu frekvenciju. *Čist* ili *prost ton* je zvuk čiji izvor vrši proste harmonijske oscilacije. Osnovna karakteristika čistog tona je njegova frekvencija.

Zvuk koji daju muzički instrumenti predstavlja složen ton. Složeni ton se može razložiti na niz prostih tonova. Najmanja frekvencija ν u tom nizu karakteriše *osnovni ton*, a ostale *više harmonike*. Osnovna frekvencija odredjuje visinu tona. Tonovi čije su frekvencije 2ν, 3ν, 4ν,...,$n\nu$ predstavljaju više harmonike. *Boja tona* zavisi od toga koji su viši harmonici prisutni u frekventnom spektru tona i sa kakvim intenzitetom. U zavisnosti od boje razlikuju se glasovi ljudi, kao i tonovi različitih muzičkih instrumenata.

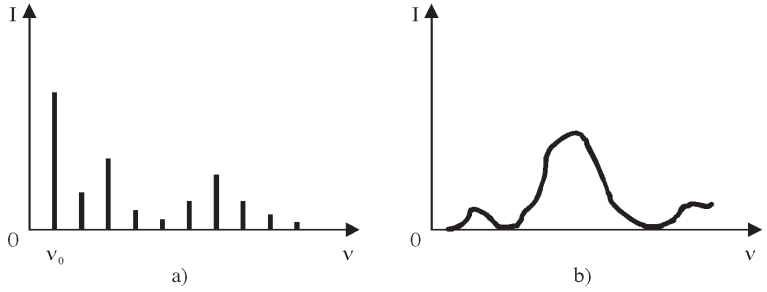
Intenzitet ili jačina tona (I) zavisi od amplitude oscilovanja i predstavlja fizičku jačinu tona. Pošto je osetljivost uha na različite frekvencije različita, govori se o *subjektivnoj* (fiziološkoj) jačini tona (o ovoj pojavi biće reči kasnije).

Šum predstavlja složeni talas promenjivih frekvencija i amplituda. Ukoliko ton sadrži više frekvencija koje nisu njegovi harmonici, utoliko je bliži šumu. Ovakve vrste zvuka se pojavljuju pri vibraciji mašina, šuštanju lišća, škripi itd.

Ton ima linijski spektar. Takav spektar daju različiti muzički binstrumenti. Šum ima kontinualni spektar. Primer linijskog i kontinualnog spektra dat je na slici 14.1.

Kao i drugi talasi, zvuk se odbija pravilno od ravnih površina ako su neravnine reda talasne dužine zvučnih talasa. Kod odbijenog zvuka subjektivno se razlikuju *jek* i *odjek*. Izgovaranje jednog sloga traje

približno $1/10\,s$. Ako čovek čuje početak odbijenog sloga pre nego što je završio izgovaranje tog sloga, kaže se da je to jek. Ako se reflektovani slog počinje čuti kada je slog već u potpunosti izgovoren, kaže se da je to odjek. Pošto je brzina prostiranja zvuka u vazduhu oko $340\,m/s$, jasno je da će se jek javiti ako je reflektujuća površina na odstojanju manjem od $17\,m$ od osobe koja je slog izgovorila, a odjek ako je to odstojanje veće od $17\,m$.



Sl. 14.1: Spektar a) tona, b) šuma

14.2 Zvučni izvori

Pod zvučnim izvorom se podrazumeva svaki mehanički oscilator koji može pravilno da osciluje u opsegu frekvencija zvuka. U tehnici se kao zvučni izvori najčešće koriste zategnute žice, štapovi, vazdušni stubovi, membrane i ploče.

14.2.1 Zategnute žice

Na slici 14.2 prikazana je žica koja je na oba kraja učvršćena i zategnuta silom F izmedju dva nepomična oslonca. Ako se na sredini žice vrši transverzalna deformacija, usled interferencije će se obrazovati transverzalni stojeći talas. Stojeći talas će se obrazovati ako je dužina žice

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \tag{14.1}$$

gde je $n = 1, 2, 3,...$, a λ talasna dužina transverzalnog talasa. Slika 14.2 pokazuje stojeće talase za $n = 1, 2, 3$ i 4. Žica koja osciluje na jedan od načina prikazanih na slici 14.2 daje prost ton. Ako je oscilovanje složeno, na primer superpozicijom ove četiri vrste oscilacija sa slike, dobija se složen ton kod koga visinu tona odredjuje frekvencija osnovnog tona (koju daje oscilovanje na sl. 14.1.a), a ostale superponirane oscilacije predstavljaju više harmonike koji odredjuju boju tona.

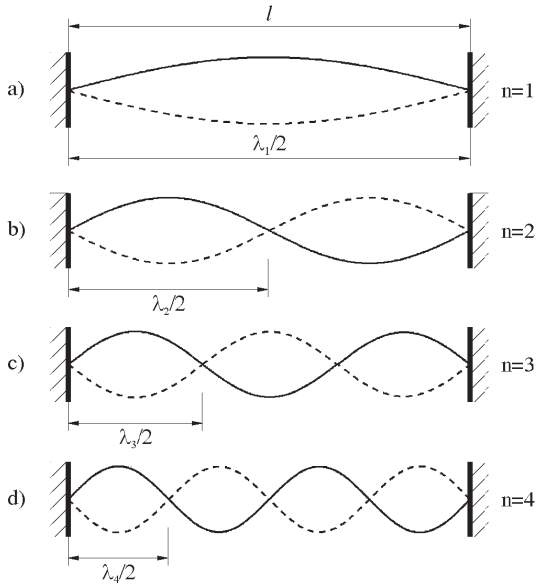
Kako je frekvencija $\nu = c/\lambda$, gde je $c = \sqrt{F/\mu}$ brzina prostiranja talasa, izraz (14.1) može se napisati u obliku:

$$\nu = \frac{n}{2l}c = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{14.2}$$

Instrumenti sa žicama se podešavaju ("štimuju") promenom sile zatezanja F, pri čemu se sa povećanjem sile zatezanja povećava frekvencija oscilovanja žice i obrnuto. U praksi se, na primer, žice koje daju duboke tonove obavijaju tanjom žicom kako bi se povećala masa po jedinici dužine μ. Na taj način se smanjuje frekvencija, a žica nije suviše dugačka.

14.2.2 Štapovi

Kod štapova se mogu obrazovati kako transverzalne tako i longitudinalne oscilacije. Na slici 14.3 predstavljene su transverzalne oscilacje štapa. Ako je štap učvršćen na jednom kraju i ako se njegov slobodan kraj izvede iz ravnotežnog položaja, on će početi da osciluje i taj poremećaj će se proširiti u vidu talasa ka utvrdjenom kraju štapa, odakle će se odbijati i ponovo vraćati prema slobodnom kraju. Kao rezultat toga nastaće stojeći talas, čiji se trbuh nalazi na slobodnom kraju štapa. Stojeći transverzalni



Sl. 14.2: Oscilovanje zategnute žice, učvršćene na oba kraja

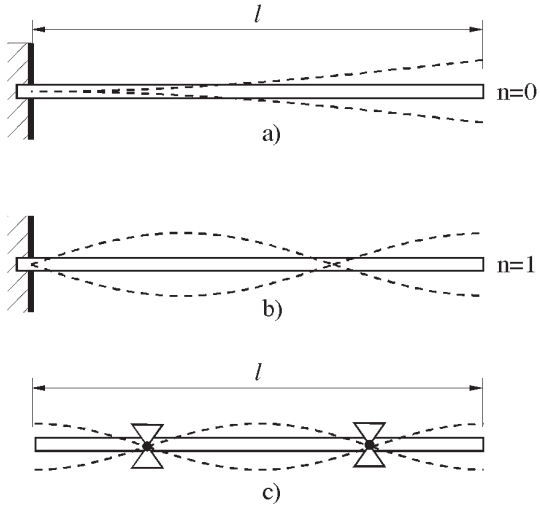
talas se obrazuje tako da je dužina štapa $l = \lambda/4$ za slučaj na slici 14.3.a, a $l = 3\lambda/4$ za slučaj na slici 14.3.b. Uopšte, može se napisati da je

$$l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \tag{14.3}$$

dok je frekvencija

$$\nu = (2n + 1)\frac{c}{4l}, \tag{14.4}$$

gde je n ma koji ceo broj.



Sl. 14.3: Transverzalne oscilacije štapa
a) osnovni ton kada je štap učvršćen na jednom kraju
b) prvi viši harmonik kada je štap učvršćen na jednom kraju
c) osnovni ton kada je štap učvršćen u dvema tačkama

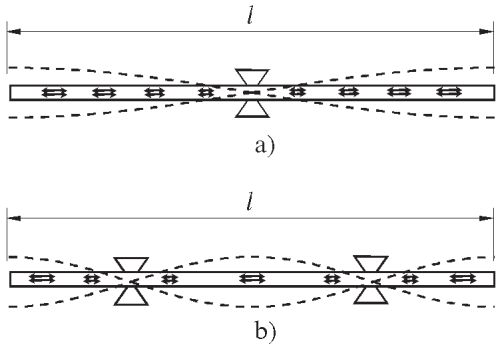
Ako je štap učvršćen u dvema tačkama (sl. 14.3.c), onda se u njima javljaju čvorovi stojećeg talasa. Uslov za obrazovanje stojećeg talasa u ovom slučaju analogan je uslovu za obrazovanje stojećeg talasa zategnute žice

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \tag{14.5}$$

dok je frekvencija oscilovanja štapa data izrazom

$$\nu = \frac{nc}{2l}, \tag{14.6}$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...$



Sl. 14.4: Longitudinalni stojeći talasi kod štapova
a) štap učvršćen u jednoj tački
b) štap učvršćen u dvema tačkama

Longitudinalne stojeće talase kod štapa moguće je ostvariti ako se izvrši longitudinalna deformacija (sl. 14.4). To se u praksi postiže tako što se štap uzduž tare kožom premazanom kalofonijumom. Pri obrazovanju stojećeg talasa, čestice na krajevima štapa i u sredini izmedju tačaka učvršćenja oscilovaće maksimalnom amplitudom (trbusi stojećeg talasa). Uslov za obrazovanje stojećeg talasa u ovom slučaju analogan je uslovu kod štapa prikazanog na slici 14.3.c, tj.

$$l = n\frac{\lambda}{2}; \quad \nu = \frac{nc}{2l}, \tag{14.7}$$

gde je $n = 1, 2, 3, ...,$ a c brzina prostiranja talasa.

14.2.3 Vazdušni stubovi

Kod duvačkih muzičkih instrumenata (frula, klarinet, svirala, truba itd.) ton nastaje usled oscilovanja vazduha u samom instrumentu. Vazduh u instrumentu naziva se vazdušni stub. Da bi se što lakše shvatilo oscilovanje vazdušnog stuba biće objašnjen primer svirale, kao najjednostavnijeg muzičkog instrumenta. Mlaz vazduha koji ulazi u sviralu udara na jednu oštru ivicu, usled čega se obrazuju vazdušni vrtlozi, koji izazivaju oscilovanje vazdušnog stuba. Cev svirale može biti zatvorena na jednom kraju (sl. 14.5.a) i otvorena na oba kraja (sl. 14.5.b).

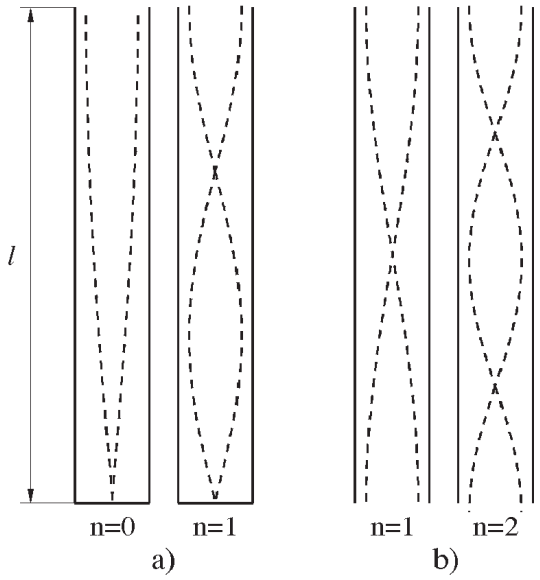
Kod cevi zatvorene na jednom kraju (sl. 14.5.a) pogodna struja vazduha, koja udara kroz otvor svirale, izaziva promenu pritiska koji se prostire u vidu talasa ka zatvorenom kraju. Od zatvorenog kraja talas se odbija i u svirali se obrazuje stojeći talas sa čvorom na zatvorenom, a trbuhom na otvorenom kraju. Ovakav slučaj odgovara oscilovanju štapa učvršćenog na jednom kraju, pa će i ovde važiti isti izrazi (14.3) i (14.4), tj.

$$\begin{aligned} l &= (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \\ \nu &= (2n+1)\frac{c}{4l}, \end{aligned} \tag{14.8}$$

gde je c brzina prostiranja longitudinalnih talasa u vazduhu.

Kod vazdušnog stuba otvorenog na oba kraja oscilacije su takve da se trbusi stojećeg talasa uvek nalaze na otvorenim krajevima. Ovakav slučaj je analogan slučaju oscilovanja štapa učvršćenog u dvema tačkama, pa će važiti izrazi

$$\begin{aligned} l &= n\frac{\lambda}{2} \\ \nu &= \frac{nc}{2l}, \end{aligned} \tag{14.9}$$



Sl. 14.5: Stojeći talasi kod vazdušnih stubova
a) osnovni ton i prvi viši harmonik kod vazdušnog stuba zatvorenog na jednom kraju
b) osnovni ton i prvi viši harmonik kod vazdušnog stuba otvorenog na oba kraja

gde je c brzina prostiranja longitudinalnih talasa u vazduhu.

14.3 Intenzitet zvuka

Intenzitet ili jačina zvuka I (gustina energetskog fluksa zvučnih talasa) predstavlja srednju vrednost energije koju prenesu zvučni talasi u jedinici vremena kroz jedinicu površine normalne na pravac prostiranja talasa. Intenzitet zvučnih talasa, kao i kod ostalih mehaničkih talasa, dat je izrazom (13.24).

Prostiranje longitudinalnih zvučnih talasa u elastičnoj sredini izaziva zapreminsku deformaciju te sredine. Usled toga dolazi do promene pritiska u svakoj tački te sredine. Intenzitet zvuka može se izraziti preko amplitude pritiska sredine, tj.

$$I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{c\varrho}, \tag{14.10}$$

gde je p_m maksimalna vrednost supreponiranog pritiska (amplituda pritiska), ϱ gustina sredine u neporemećenom stanju i c brzina prostiranja zvuka u toj sredini. Proizvod $c\varrho$ naziva se *akustični otpor sredine*. U tabeli 14.1 date su vrednosti akustičnog otpora za neke materijale.

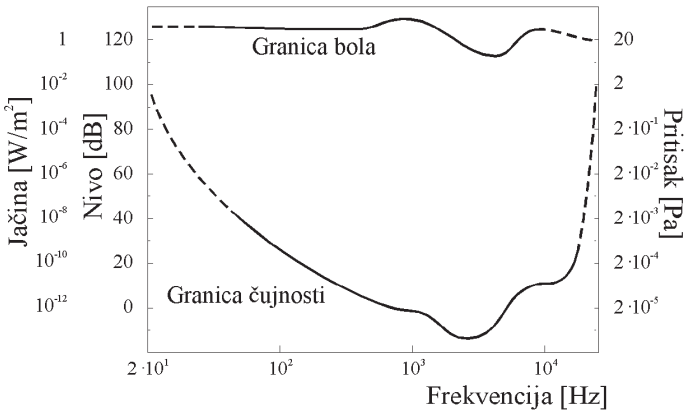
Tabela 14.1: Brzina prostiranja zvuka (c), gustina sredine (ϱ) i akustični otpor (ϱc)

Materijal	$c(ms^{-1})$	$\varrho(gm^{-3})$	$\varrho c(gm^{-2}s^{-1})$
Gvoždje	5170	7,8	4000000
Beton	2200	2,2	480000
Drvo	5000	0,5	250000
Voda	1440	1,0	144000
Guma	60	1,0	6000
Vazduh	340	0,0013	44

Ljudsko uho je ograničeno u prijemu zvuka ne samo po frekvencijama, nego i po njegovom intenzitetu. Uho može da registruje zvuk čiji intenzitet prelazi neku minimalnu vrednost, koja se naziva *prag čujnosti*. Prag čujnosti zavisi od frekvencije i kod različitih osoba ima različitu vrednost. Uho je najosetljivije pri frekvencijama od 1500 Hz do 3000 Hz kada je je prag čujnosti reda $10^{-12}\,W/m^2$.

Suviše jak zvuk izaziva osećaj pritiska i bol u uhu. Intenzitet zvuka pri kome nastaje bol u uhu naziva se *prag osećaja bola*. On, kao i prag čujnosti, zavisi od frekvencije zvučnih talasa. Pri frekvencijama od 500 do 700 Hz prag osećaja bola nastaje pri intenzitetu zvuka od $10^2\, W/m^2$.

Izmedju praga čujnosti i praga osećaja bola nalazi se oblast čujnosti (sl. 14.6).



Sl. 14.6: Oblast čujnosti

Izraz (13.24) važi za objektivnu vrednost intenziteta zvuka koji se može meriti. Medjutim, ljudsko uho oseća gradaciju jačine zvuka po logaritamskom zakonu (subjektivna jačina zvuka). Ovu pojavu su izučavali Veber (Weber) i Fehner (Fechner) i formulisali zakon koji se naziva *Veber-Fehnerov psihofizički zakon*. Po ovom zakonu, čulo sluha oseća gradaciju jačine zvuka približno kao logaritam intenziteta zvuka izraženog u W/m^2. Na osnovu ovog logaritamskog zakona ustanovljena je skala nivoa jačine zvuka, koja se naziva *nivo zvuka* ili *glasnost* L. Prema Veber-Fehnerovom zakonu, nivo zvuka dat je sledećim izrazom:

$$L = k \log \frac{I}{I_o}, \tag{14.11}$$

gde je $I_o = 10^{-12}\, Wm^{-2}$, tj. intenzitet zvuka na granici čujnosti, a I izmerena vrednost intenziteta zvuka. Za $k = 1$, nivo zvuka se meri u belima (B), a za $k = 10$, u decibelima (dB).

Na slici 14.6 pored intenziteta zvuka date su i vrednosti nivoa zvuka. U tabeli 14.2 date su približne vrednosti nivoa zvuka za neke tipične zvuke.

Za obavljanje pojedinih poslova, pored ostalih uslova (pritiska, temperature, vlažnosti vazduha, jačine osvetljenosti itd.) čoveku je potrebno da nivo zvuka na radnom mestu ne prevazilazi vrednosti koje su date u tabeli 14.3. Ako nivo zvuka prevazilazi vrednosti date u ovoj tabeli, kvalitet rada značajno opada i u ekstremnom slučaju sluh može biti trajno oštećen.

Pošto visoki nivo zvuka ugrožava zdravlje, izradjeni su propisi za zaštitu kojima je ograničeno vreme u toku koga u jednom radnom danu radnik može biti izložen zvuku odredjenog nivoa. Vrednosti toga vremena date su u tabeli 14.4.

Pokazalo se da zvuk, čiji je nivo iznad 90 dB, može da izazove nepovratna oštećenja čula sluha kada je čovek duže vreme izložen tom uticaju.

14.4 Rezonancija kod zvuka. Rezonatori

Kao što je već rečeno, rezonancija je pojava koja nastaje kod prinudnih oscilacija. Pošto su zvučni izvori mehanički oscilatori, i kod njih se mogu uspostaviti prinudne oscilacije.

Svaki zvučni izvor može se dovesti u rezonanciju pomoću periodične sile, koju obično obezbedjuje neki drugi zvučni izvor. To se može pokazati pomoću jednog jednostavnog uredjaja koji je šematski prikazan na slici 14.7. U sud sa vodom potopljena je cev, unutrašnjeg prečnika nekoliko centimetara koja je na oba kraja otvorena. Dužina vazdušnog stuba l u cevi može se menjati njenim podizanjem i spuštanjem. Kada se zvučna viljuška dovede u oscilovanje i prinese gornjem otvoru cevi, onda će se pod uticajem ovih oscilacija u vazdušnom stubu proizvoditi prinudne oscilacije. Sopstvena frekvencija vazdušnog stuba

Tabela 14.2: Nivo (L) i intenzitet (I) zvuka

Vrsta zvuka	$L(dB)$	$I(W/m^2)$
Granica čujnosti	0	10^{-12}
Šum lišća, slab šapat na rastojanju od $1\,m$	10	10^{-11}
Šaputanje	20	10^{-10}
Sviranje violine pijanisimo	30	10^{-9}
Slaba muzika	40	10^{-8}
Šum u restoranu sa otvorenim prozorom	50	10^{-7}
Glasni radio. Srednji nivo razgovetnih reči na rastojanju 1 m	60	10^{-6}
Šum u unutrašnjosti tramvaja	70	10^{-5}
Šum na ulici	80	10^{-4}
Fortisimo većeg simfonijskog orkestra	90	10^{-3}
Automobilska sirena	100	10^{-2}
Pneumatski čekić	110	10^{-1}
Jak udar groma	120	10^{0}

Tabela 14.3: Maksimalno dozvoljeni nivo zvuka (L) za obavljanje pojedinih delatnosti

Vrsta delatnosti	$L(dB)$
Najgrublji fizički rad	90
Rutinski rad mentalnog karaktera	70
Rad koji zahteva koncentraciju	55
Vrhunska intelektualna delatnost	35

zavisi od njegove dužine. Podizanjem i spuštanjem cevi menjaće se sopstvena frekvencija vazdušnog stuba. Kada se podesi takva dužina l, pri kojoj vazdušni stub ima sopstvenu frekvenciju jednaku frekvenciji zvučne viljuške, nastupiće rezonancija. Tada nastaje intenzivno oscilovanje vazdušnog stuba, što se može ustanoviti po povećanom intenzitetu tona.

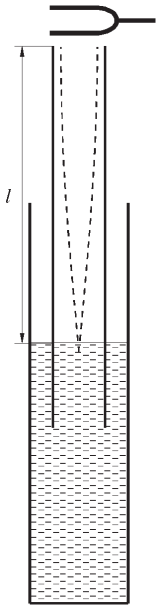
Pri oscilovanju zvučne viljuške energija zvučnih talasa je mala usled njene male površine. Medjutim, kada dodje do rezonancije, onda pored zvučne viljuške, energiju emituje i vazdušni stub, te se usled intenzivnijeg emitovanja zvučne energije ton jače čuje. U praksi su izvori zvuka relativno male površine, zbog čega je energija koju oni emituju mala. Da bi zvučni izvor davao veću jačinu tona, koriste se zvučni oscilatori (tela) na kojima se može izazvati rezonancija. Takvi oscilatori se nazivaju *rezonatori*. U tom slučaju pored zvučnog izvora i rezonator emituje zvuk, pa je emitovana energija veća i zvuk se jače čuje.

Većina muzičkih instrumenata poseduje rezonator od koga se zahteva da rezonira na svaki ton, zbog čega oni imaju različite oblike. Tako se, na primer, kao rezonator kod violine koristi drvena kutija sa izvijenim površinama. U takvoj kutiji se koristi ne samo rezonancija samih zidova kutije, već i vazdušnih stubova u njoj. Kod saksofona kao rezonator se koristi izvijeni levak i vazdušni stub u njemu. Zvučnici se najčešće postavljaju na komadu daske koja služi kao rezonator itd.

Rezonancija vazdušnog stuba se može postići i pomoću Kuntove (Kundt) cevi. To je staklena cev A (sl. 14.8) u kojoj se nalazi sitan prah od plute. Ova cev je zatvorena sa jedne strane pokretnim čepom B. Pomeranjem ovog čepa može se podešavati dužina vazdušnog stuba u cevi. Na drugom kraju cevi postavljen je u istoj osi metalni štap CD, koji je učvršćen u tački E i može da vrši longitudinalne oscilacije sa čvorom u tački E. Na kraju štapa učvršćena je laka pločica C, tako da zatvara drugi kraj cevi. Oscilacije štapa se najčešće ostvaruju pomoću elektromagneta, koji se pobudjuje generatorom

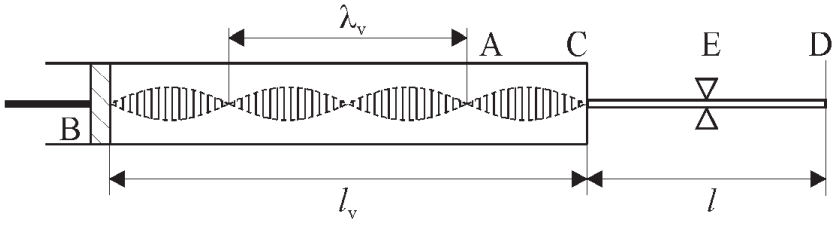
Tabela 14.4: Dopušteno vreme izlaganja (t_d) radnika zvuku tokom dana

Nivo zvuka (dB)	$t_d(h)$
90	8
92	6
95	4
97	3
100	2
102	1,5
105	1
110	0,5
115	0,25



Sl. 14.7: Uz objašnjenje rezonancije kod vazdušnog stuba

zvučnih frekvencija (elektromagnet i generator zvučnih frekvencija nisu prikazani na slici). Talasna dužina stojećeg talasa se dobija prema izrazu (14.9), tj. $\lambda = 2l/n$, gde je l dužina štapa. Longitudinalne oscilacije štapa izazivaju prinudne oscilacije vazdušnog stuba u cevi preko pločice C. Ako se pomeranjem čepa B podesi razonancija, nastaće intenzivno oscilovanje vazdušnog stuba u cevi. U vazdušnom stubu će se na taj način obrazovati longitudinalni stojeći talas, pri čemu za dužinu vazdušnog stuba l_v mora biti ispunjen uslov prema izrazu (14.9) $l_v = n\lambda/2$, gde je λ_v talasna dužina stojećeg talasa u vazdušnom stubu. Zahvaljujući prahu u staklenoj cevi moguće je uočiti stojeći talas. Pojava rezonancije se primećuje po pokretu praha. Na mestima gde se obrazuje trbuh stojećeg talasa čestice vazduha će intenzivno oscilovati i povlačiti u oscilovanje i prah, te će se na tim mestima prah pokrenuti, dok će na mestima čvorova ostati na svom mestu. Na taj način se formiraju *Kuntove figure* koje čine stojeći talas vidljivim. Rastojanje izmedju dve sredine figura je rastojanje izmedju dva trbuha, a to predstavlja polovinu talasne dužine



Sl. 14.8: Kuntova cev

$\lambda_v/2$ stojećeg talasa. Tako se merenjem rastojanja Kuntovih figura meri talasna dužina λ_v.

Kod Kuntove cevi, longitudinalni stojeći talasi se obrazuju i u štapu i u vazdušnom stubu. Njihove frekvencije su iste, jer se oscilacije prenose od štapa na vazdušni stub. Otuda sledi da je

$$\frac{c_v}{\lambda_v} = \frac{c}{\lambda},$$

gde je c brzina zvuka u štapu, a λ talasna dužina stojećeg talasa u štapu, koja se dobija merenjem dužine štapa. Gornji izraz omogućva nalaženje jedne brzine ukoliko je poznata druga, merenjem talasnih dužina λ_v i λ.

14.5 Akustičnost prostorija

Kada zvučni izvor osciluje u zatvorenoj prostoriji, slušalac neće čuti samo zvuk koji dolazi direktno od izvora, već i zvuk odbijen od reflektujućih površina u prostoriji, tj. od zidova, tavanice, poda i svih predmeta koji se nalaze u prostoriji. Intenzitet reflektovanog zvuka zavisi od oblika, veličine i rasporeda reflektujućih površina, kao i od materijala od kojeg su izradjene. Ako zvučni izvor konstantno emituje talase koji zidovi i ostale površine slabo apsorbuju, mogu se obrazovati stojeći talasi u pojedinim delovima prostorije. Zbog toga će se u nekim delovima prostorije zvuk čuti jače, a u nekim slabije.

Različiti materijali različito apsorbuju zvučne talase. Ova osobina materijla okarakterisana je koeficijentom apsorbcije A, koji je dat izrazom

$$A = \frac{P_a}{P_u}, \tag{14.12}$$

gde je P_a zvučna snaga koja se apsorbuje na odredjenoj površini, P_u ukupna zvučna snaga koja pada na tu površinu.

U tabeli 14.5 su date tipične vrednosti koeficijenta apsorpcije zvuka.

Tabela 14.5: Koeficijent apsorpcije zvuka (A)

Materijal	A
Beton	0,015
Ćilimi, zavese	0,2
Filc debeo $2,5\,cm$ postavljen na $8\,cm$ od zida	0,78
Otvoren prozor	1,00

Ukoliko materijali slabije apsorbuju, odbijanje zvučnih talasa biće intenzivije i obrnuto. Od prvobitno emitovanog zvučnog signala u prostoriji jedan deo će se apsorbovati, a jedan deo odbiti od reflektujućih površina. Tako odbijeni sekundarni talasi ponovo će se apsorbovati i reflektovati i tako dalje, dok intenzitet zvuka ne padne na nulu.

Znači, zvuk se po prestanku emisije u prostoriji i dalje održava. Ova pojava poznata je pod nazivom *reverberacija*, a vreme u toku kojeg se još uvek čuje zvuk po prestanku njegovog emitovanja naziva se *vreme reverberacije*. Radi bolje definicije i lakšeg merenja vremena reverberacije u tehnici je usvojeno da se ono računa od momenta prestanka rada zvučnog izvora, do momenta kada intenzitet zvuka opadne na milioniti deo prvobitne vrednosti, tj. za $60\,dB$.

Reverberacija ima veliki uticaj na aksustičnost prostorije. Ako reflektujuće površine slabo apsorbuju zvuk, vreme reverberacije će biti dugo i u prostoriji će se javiti jek neprijatan za uho. To se može otkloniti postavljanjem dobrih apsorbera zvuka na reflektujuće površine, čime se vreme reverberacije smanjuje.

Ako je koeficijent apsorbcije materijala veliki, dobiće se kratko vreme reverberacije. Prostorija u kojoj se to izborom materijala i konfiguracije površina posebno potencira naziva se *gluva soba*. U njoj vreme reverberacije može da bude 100 i više puta manje nego u običnim prostorijama. Ona služi u akustici za ispitivanje karakteristika zvučnika, zvučnih kutija, izvora nepoželjne buke raznih uredjaja itd.

Tabela 14.6: Vreme reverberacije (t_r) prostorije za pojedine namene

Namena prostorije	$t_r(s)$
Govor (amfiteatri, učionice)	0,5 - 1
Muzika	1 - 1,7
Muzika sa orgulja	2

Za razne namene ustanovljene su optimalne vrednosti vremena reverberacije t_r prostorija, čije su približne vrednosti date u tabeli 14.6.

Optimalna vremena reverberacije u pojedinim prostorijama, pored izbora dimenzija i oblika prostorije, podešavaju se i pažljivim izborom materijala od kojeg su izradjene i kojim su obložene reflektujuće površine.

Pri upotrebi prostorija sa prekratkim vremenom reverberacije koriste se *reverberacioni pojačavači*. Oni se najčešće upotrebljavaju za reprodukciju muzike u takvim prostorijama koji zahvaljujući funkciji odredjenih vodova za kašnjenje imitiraju optimalno vreme reverberacije.

Vreme reverberacije, ako se ne zahteva velika tačnost, može se izračunati po obrascu

$$t_r = 0,165\frac{V}{S}, \tag{14.13}$$

gde je V zapremina, a S ukupna površina prostorije zajedno sa predmetima koji se nalaze u njoj.

14.6 Doplerov efekat

Doplerov (Doppler) efekat je promena frekvencije oscilovanja zvučnog izvora, koju registruje prijemnik (slušalac) pri njihovom medjusobnom kretanju. Na primer, poznato je da je visina tona sirene vozila veća kada se ono približava slušaocu, a manja kada se od njega udaljava, u odnosu na visinu tona koji se javlja kada i zvučni izvor i slušalac miruju. Dakle, kretanjem zvučnog izvora u odnosu na prijemnik menja se frekvencija primljenih oscilacija. Ova promena se može zapaziti i kada zvučni izvor miruje, a prijemnik se kreće.

Pri razmatranju Doplerovog efekta obično se pretpostavlja da se zvučni izvor i prijemnik kreću po istoj pravoj. Neka su v_i i v_p brzine kretanja izvora i prijemnika, respektivno, pri čemu su one pozitivne ako se izvor zvuka ili prijemnik približavaju a negativne, ako se udaljavaju. Frekvencija oscilovanja izvora je ν_o. U zavisnosti od kretanja zvučnog izvora i prijemnika mogu se posmatrati sledeći slučajevi:

a) *Prijemnik i izvor miruju u odnosu na sredinu.* Tada je $v_i = v_p = 0$. Ako je c brzina prostiranja zvučnih talasa u razmatranoj sredini, njihova talasna dužina je

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu_o}. \tag{14.14}$$

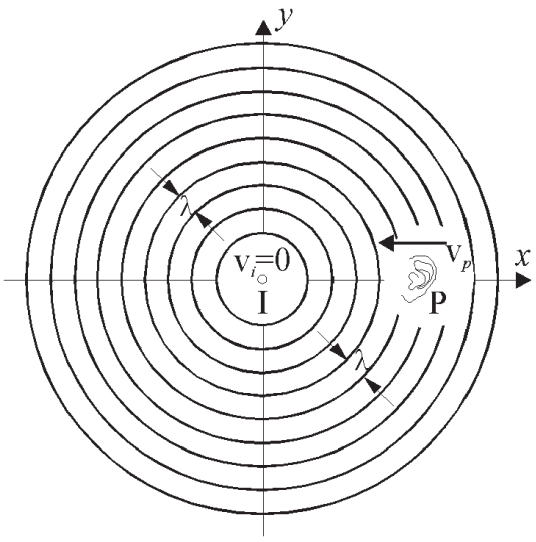
Šireći se u sredini, talasi stižu do prijemnika koji registruje frekvenciju

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{cT} = \frac{1}{T} = \nu_o. \tag{14.15}$$

Iz izraza (14.15) se vidi da je frekvencija zvuka koju registruje prijemnik jednaka frekveciji ν_o zvučnog izvora.

b) *Prijemnik se približava zvučnom izvoru koji miruje.* Tada je $v_p > 0$, a $v_i = 0$. U tom slučaju brzina prostiranja talasa u odnosu na prijemnik jednaka je $c + v_p$. Pošto se talasna dužina u ovom slučaju ne menja (sl. 14.9), za frekvenciju ν koju registruje prijemnik se dobija

$$\nu = \frac{c + v_p}{\lambda} = \frac{c + v_p}{cT} = \frac{c + v_p}{c}\nu_o. \tag{14.16}$$



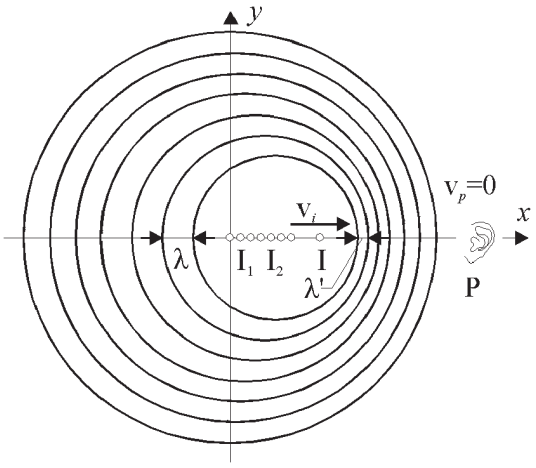
Sl. 14.9: Talasni frontovi koje registruje prijemnik u pokretu

Iz izraza (14.16) proizilazi da je frekvencija oscilovanja koju registruje prijemnik $(c + v_p)/c$ puta veća od frekvencije oscilovanja izvora.

c) *Izvor se približava prijemniku koji miruje.* Tada je $v_p = 0$, a $v_i > 0$. Brzina širenja talasa zavisi samo od svojstva sredine. Zato će se za vreme jednako periodu oscilovanja zvučnog izvora talas proširiti na rastojanje cT (jednako talasnoj dužini λ), nezavisno od toga da li izvor miruje ili se kreće. Za to vreme zvučni izvor predje rastojanje u pravcu talasa v_iT (sl. 14.10). Prema tome, talasna dužina talasa u pravcu kretanja izvora se skraćuje i jednaka je $\lambda' = \lambda - v_iT = (c - v_i)T$, pa je frekvencija talasa koju registruje prijemnik

$$\nu = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c - v_i)T} = \frac{c}{c - v_i}\nu_o, \tag{14.17}$$

tj. frekvencija ν koju registruje prijemnik povećava se za $c/(c - v_i)$ puta. Za slučaj pod b) i c) ako je $v_p < 0$ i $v_i < 0$, znak u izrazima (14.16) i (14.17) će biti suprotan.



Sl. 14.10: Talasni frontovi koje emituje izvor u pokretu

d) *Izvor i prijemnik se kreću jedan u odnosu na drugi.* Koristeći izraze (14.16) i (14.17) može se napisati opšti izraz za frekvenciju oscilovanja koju registruje prijemnik

$$\nu = \frac{c \pm v_p}{c \mp v_i}\nu_o. \tag{14.18}$$

Znak plus u brojiocu izraza (14.18) odgovara približavanju prijemnika izvoru, a znak minus njegovom udaljavanju od izvora. Znak minus u imeniocu istog izraza odgovara približavanju zvučnog izvora prijemniku, a znak plus njegovom udaljavanju.

Može se pokazati da u slučaju uniformnog kretanja izvora i prijemnika sa proizvoljnim pravcima vektora brzina $\vec{v_p}$ i $\vec{v_i}$, izraz (14.18) dobija sledeći oblik:

$$\nu = \frac{1 \pm (v_p/c)\cos\theta_2}{1 \mp (v_i/c)\cos\theta_1}\nu_o, \tag{14.19}$$

gde su θ_1 i θ_2 uglovi koje vektori $\vec{v_p}$ i $\vec{v_i}$ obrazuju sa pravom koja spaja izvor i prijemnik.

15. Fotometrija

15.1 Spektralna osetljivost oka

Fotometrija u užem smislu je deo optike koji se bavi merenjem energije elektromagnetnih talasa u vidljivom delu spektra kao, i veličina povezanih sa njom. Merenjem energije u svim oblastima tog spektra bavi se posebna grana fizike koja se naziva **radiometrija**. Standardna fotometrija se bavi merenjima u opsegu talasnih dužina od $100\,nm$ do $1\,mm$, dok je vidljivi opseg talasnih dužina od 380 do $780\,nm$.

Fotometrija se bavi merenjem veličina vezanih za tačkaste svetlosne izvore. Pošto takvi ne postoje, pod tačkastim izvorom se smatra merenje kod koga je detektor najmanje na 10 puta većem odstojanju nego što je linearna dužina izvora.

Ljudsko oko nije podjednako osetljivo na sve talasne dužine elektromagnetnog zračenja u vidljivom delu spektra. Zbog toga se moraju postaviti dve vrste fotometrijskih merenja – **energetska** i **vizuelna** (**fotometrijska**).

Za izračunavanje energetskih veličina koriste se uobičajene jedinice Medjunarodnog sistema. Merenja ovih veličina se mogu ostvariti pomoću detektora koji podjednako registruju energiju koja odgovara različitim talasnim dužinama (termički detektori).

Poznato je da mnogi detektori, kao što su oko, fotoelement, fotografska ploča i dr. selektivno apsorbuju i detektuju energiju svetlosnih talasa različitih talasnih dužina. Tako na primer ljudsko oko oseća, za istu snagu svetlosnog izvora, mnogo jači nadražaj pri talasnoj dužini $\lambda = 555\,nm$ nego pri drugim talasnim dužinama. Zračenja izvan područja vidljivog spektra uopšte ne izazivaju svetlosni utisak, iako mogu biti veoma škodljiva za oko.

Za ocenu stepena svetlosnog utiska kojim na oko deluju zraci različitih talasnih dužina uveden je pojam **relativne spektralne osetljivosti ljudskog oka za monohromatsku svetlost** (V_λ) i snimljena je funkcija $V_\lambda = f(\lambda)$ u celom vidljivom delu spektra.

Veličina V_λ za neku talasnu dužinu λ dobija se na sledeći način. Oko se izloži svetlosnom fluksu na talasnoj dužini $\lambda_{max} = 555\,nm$, iz izvora snage $P_{\lambda max}$. Zatim se izmeri snaga izvora P_λ koji pod istim uslovima daje isti svetlosni utisak na oko na talasnoj dužini λ, kao što je utisak sa izvorom snage $P_{\lambda max}$, što se vrlo tačno može utvrditi odgovarajućim vizuelnim fotometrom pri istovremenom dejstvu oba izvora. Veličina V_λ predstavlja odnos te dve snage zračenja, tj.

$$V_\lambda = \frac{P_{\lambda max}}{P_\lambda}. \tag{15.1}$$

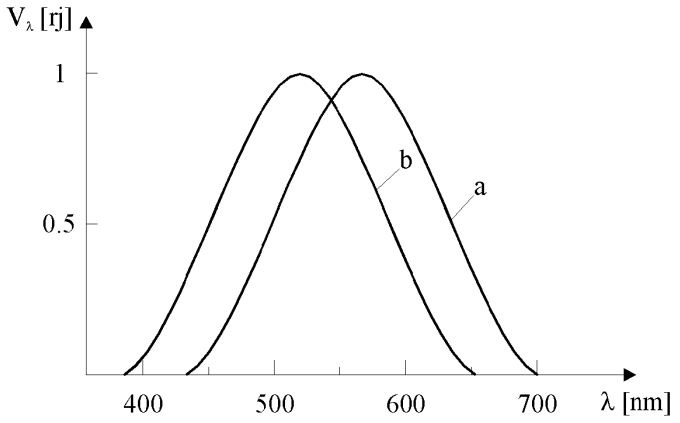
Na slici 15.1 prikazane su dve krive. Kriva a je na opisani način snimljena pri dnevnoj osvetljenosti (iznad $10\,lx$). Kriva b je snimljena pri slaboj noćnoj svetlosti (ispod $0,1\,lx$). U fotometriji se koristi kriva a. Kriva a ima maksimum na $555\,nm$, a kriva b na $505\,nm$ talasne dužine.

Treba napomenuti da su ove krive snimljene više puta, nadjene su srednje vrednosti koje odgovaraju prosečnom ljudskom oku i zatim su prihvaćene kao medjunarodni standard, čime su u fotometriji potpuno izgubile sva obeležja subjektivnosti.

Zbog navedenih pojava u fotometriji se, pored energetskih uvode i vizuelne (svetlotehničke jedinice), koje se zasnivaju na osetljivosti ljudskog oka, tj. na funkciji $V_\lambda = f(\lambda)$.

15.2 Fotometrijske veličine i jedinice

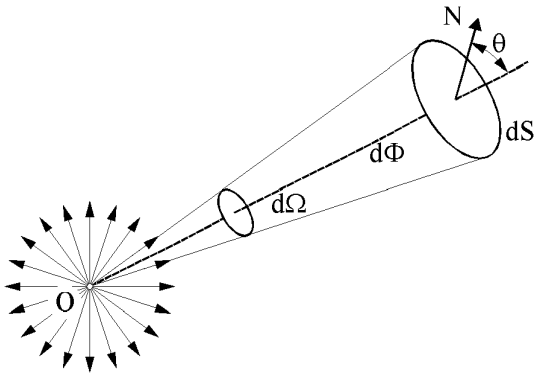
Fotometrijske veličine se dele na dve osnovne grupe. U prvu grupu spadaju veličine koje se odnose na emitovanje svetlosne energije od nekog izvora (emitera). Tu spadaju: **svetlosni fluks, jačina** ili **intenzitet svetlosti, osvetljaj** ili **emisivnost** ili **emitacija** i **sjaj svetlosnog izvora** ili **luminacija**.



Sl. 15.1: Relativna spektralna osetljivost prosečnog ljudskog oka za monohromatsku svetlost (V_λ) u funkciji talasne dužine (λ) a) osetljivost iznad $10\,lx$ (dnevno vidjenje) b) osvetljenost ispod $0,1\,lx$ (noćno vidjenje)

U drugu grupu spadaju veličine koje se odnose na osvetljenu površinu (detektor). Tu spadaju sledeće veličine: **osvetljenost** ili **iluminacija**, **svetlosna emitivnost, sjaj osvetljene površine, svetlosna ekspozicija i refleksiona moć**.

Jedna od najvažnijih veličina u fotometriji je **količina svetlosti (svetlosna energija)** Q. Energetska veličina za količinu svetlosne enegije je $J = Ws$, a vizuelna $lm\,s$.



Sl. 15.2: Uz definiciju svetlosnog fluksa

Svetlosni fluks (svetlosni tok). Neka se od tačkastog svetlosnog izvora O širi talasni front (sl. 15.2). Na nekom rastojanju od izvora nalazi se površina kojoj odgovara prostorni ugao $d\Omega$. Svetlosni fluks $d\Phi$ u odredjenom pravcu definiše se kao **količina svetlosne enegije koja se u jedinici vremena prenese kroz datu površinu, tj. u datom prostornom uglu** $d\Omega$. On se matematički može izraziti na sledeći način:

$$d\Phi = \frac{dQ}{dt}, \tag{15.2}$$

gde je dQ količina svetlosti u prostornom uglu $d\Omega$. Svetlosni fluks se može definisati i kao snaga zračenja kroz površinu dS. Ako sredina ne apsorbuje svetlosnu energiju, onda kroz ma koji presek konusa prikazanog na slici 15.2 prolazi isti fluks. Ukupan svetlosni fluks Φ koji se emituje od izvora O u svim pravcima dobija se integracijom elementarnih flukseva u pojedinim pravcima

$$\Phi = \int_V d\Phi. \tag{15.3}$$

Eneregetska jedinica za svetlosni fluks je **vat** (W), a vizuelna **lumen** (lm). **Lumen je svetlosni fluks u prostornom uglu od jednog steradijana, koji emituje tačkasti svetlosni izvor čija je svetlosna jačina u svim pravcima prostora jednaka jednoj kandeli**.

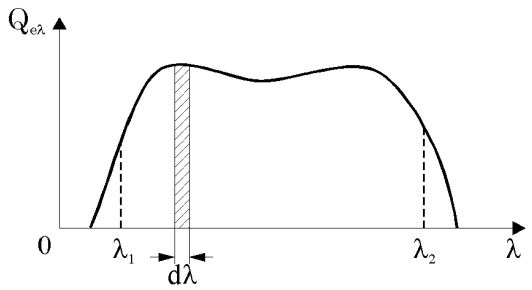
Veza izmedju vata i lumena nije jednostavna zbog toga što je, kako je već navedeno, osetljivost oka za različite talasne dužine svetlosti različita. Za zračenje talasne dužine od $555\,nm$, snazi od $1\,W$ odgovara fluks od $683\,lm$, ili $1\,lm = 0,0015\,W$.

Zavisnost svetlosne energije Q_e, izražene u energetskim jedinicama, od talasne dužine λ data je krivom na slici 15.3. Ukupna svetlosna energija Q_e izražena u energetskim jedinicama, za interval talasnih dužina od λ_1 do λ_2 data je izrazom

$$Q_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Q_{e\lambda} d\lambda. \tag{15.4}$$

Za mali interval λ, $\lambda + d\lambda$ svetlosna energija dQ_v, izražena u vizuelnim jedinicama, data je izrazom

$$dQ_v = Q_{e\lambda} 683\, V_\lambda d\lambda. \tag{15.5}$$



Sl. 15.3: Svetlosna energija u funkciji talasne dužine

U oblasti vidljive svetlosti energija Q_v se može izraziti na sledeći način:

$$Q_v = K_m \int_{380\,nm}^{780\,nm} Q_{e\lambda} V_\lambda d\lambda, \tag{15.6}$$

gde je $K_m = 683\,lm/W$ maksimalni **fotometrijski ekvivalent** zračenja.

Intenzitet ili **jačina svetlosti** I predstavlja energiju emitovanu u jedinici vremena po jedinici prostornog ugla. Intenzitet svetlosti predstavlja odnos izmedju svetlosnog fluksa, koji izvor u datom pravcu emituje u element prostornog ugla, i elementa prostornog ugla

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{15.7}$$

Ako je svetlosni fluks u svim pravcima isti (izotropni svetlosni izvor), tj. ako se posmatra ravnomeran svetlosni fluks Φ, koji svetlosni izvor emituje u prostorni ugao Ω, može se gornji izraz predstaviti u jednostavnijem obliku:

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi}. \tag{15.8}$$

Svetlosni izvori najčešće nisu izotropni (emisija u različitim pravcima je različita). Zbog toga se definiše srednji intenzitet svetlosti kao odnos ukupnog svetlosnog fluksa Φ i prostornog ugla Ω

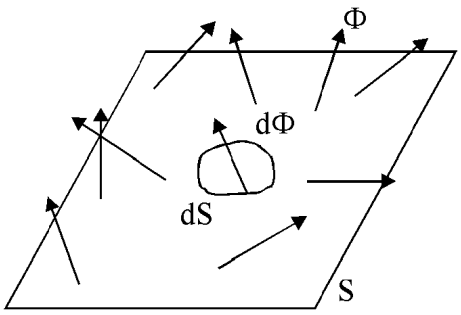
$$I_{sr} = \frac{\phi}{\Omega}. \tag{15.9}$$

Energetska jedinica za jačinu svetlosti je W/sr, a vizuelna $cd = lm/sr$.

Osvetljaj predstavlja odnos emitovanog svetlosnog fluksa sa površine i same površine (sl. 15.4)

$$L = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{15.10}$$

Ako je fluks ravnomeran i stalan, onda je



Sl. 15.4: Površina izvora koji emituje svetlost

$$L = \frac{\Phi}{S}. \tag{15.11}$$

Ako fluks nije ravnomeran, ali je stalan, uzima se srednja vrednost osvetljaja

$$L_{sr} = \frac{\Phi}{S}, \tag{15.12}$$

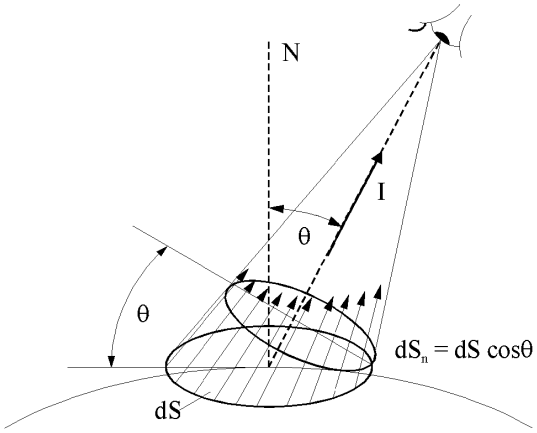
gde je Φ ukupan svetlosni fluks emitovan sa površine S.

Energetska jedinica za osvetljaj je W/m^2, a vizuelna lm/m^2.

Sjaj svetlosnog izvora u nekom pravcu predstavlja odnos intenziteta svetlosti u tom pravcu i normalne projekcije površine izvora koji emituje (sl. 15.5)

$$B = \frac{I}{dS_n} = \frac{I}{dS\,\cos\theta}, \tag{15.13}$$

gde je θ ugao izmedju pravca emisije svetlosti i normale na površinu koja emituje svetlost.



Sl. 15.5: Uz objašnjenje sjaja svetlosnog izvora

Korišćenjem izraza (15.7) i (15.13) svetlosni fluks se može izraziti preko sjaja svetlosnog izvora kao

$$d\Phi = B dS d\Omega\,\cos\theta. \tag{15.14}$$

Sjaj svetlosnog izvora u opštem slučaju zavisi od ugla θ. Medjutim, ako se radi o crnim telima, mutnim staklima i slično, kod kojih se svetlost podjednako rasejava u svim pravcima (sredine sa idealnim rasejavanjem), može se smatrati da sjaj svetlosnog izvora ne zavisi od pravca. Za takva tela se kaže da se pokoravaju Lambertovom (Lambert) zakonu. Ova tela se još nazivaju i **kosinusni emiteri** (radijatori ili izračivači).

Energetska jedinica za sjaj svetlosnog izvora je $W/(sr\,m^2)$, a vizuelna cd/m^2.

Može se pokazati da, za slučaj kada važi Lambertov zakon, postoji sledeća veza izmedju sjaja i osvetljaja:

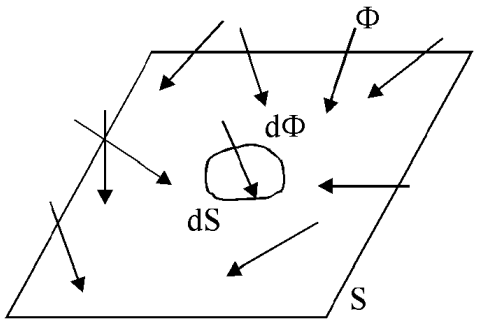
$$B = \frac{1}{\pi} L. \tag{15.15}$$

Znači, za emitere koji se pokoravaju Lambertovom zakonu sjaj površine je π puta manji od njegovog osvetljaja.

Osvetljenost je mera za intenzitet svetlosi koja pada na odredjenu površinu. Ona je definisana odnosom svetlosnog fluksa koji pada na datu površinu i same te površine (sl. 15.6)

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{15.16}$$

Osvetljenost neke površine predstavlja gustinu svetlosnog fluksa na nju.



Sl. 15.6: Površina na koju pada svetlost čiji je fluks Φ

Ako svetlosni fluks nije ravnomeran, onda se odredjuje srednja vrednost osvetljenosti kao količnik ukupnog fluksa i površine na koju on padne, tj.,

$$E_{sr} = \frac{\Phi}{S}. \tag{15.17}$$

Osvetljenost se može izraziti preko intenziteta svetlosti, korišćenjem izraza (15.7) iz koga proizilazi da je $d\Phi = I d\Omega$. Sa slike 15.7 se vidi da je prostorni ugao jednak

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS\,\cos\theta}{r^2}, \tag{15.18}$$

pa je

$$d\Phi = \frac{I dS\,\cos\theta}{r^2}. \tag{15.19}$$

Zamenom ovog izraza u (15.16) dobija se konačan izraz za osvetljenost površine dS koja je na udaljenosti r od svetlosnog izvora

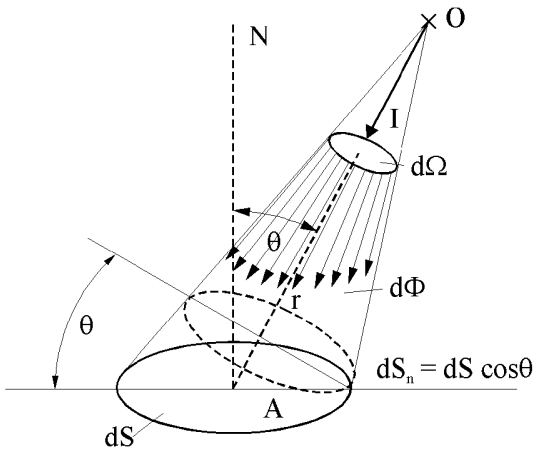
$$E = \frac{I}{r^2}\cos\theta, \tag{15.20}$$

gde je θ ugao izmedju normale na površinu koja se osvetljava i pravca OA na slici 15.7. Izraz (15.20) predstavlja Lambertov zakon iz koga se vidi da je osvetljenost površine u tački A srazmerna kosinusu ugla θ, a obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja izmedju posmatrane tačke i svetlosnog izvora. Ako svetlost pada normalno na površinu, tada je $\theta = 0$, pa je

$$E = \frac{I}{r^2}. \tag{15.21}$$

Ako osvetljenost u nekoj tački potiče od više svetlosnih izvora, onda je ukupna osvetljenost jednaka algebarskom zbiru osvetljenosti koje potiču od tih izvora, tj.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i. \tag{15.22}$$



Sl. 15.7: Uz definiciju osvetljenosti odredjene površine

Energetska jedinica za osvetljenost je W/m^2, a vizuelna **luks** lx ($lx = lm/m^2$). Luks se definiše kao **osvetljenost površine od jednog kvadratnog metra na koju pada ravnomerno raspodeljen svetlosni fluks od jenog lumena**.

Uporedjivanjem izraza (15.10) i (15.16) može se zapaziti da se osvetljaj i osvetljenost izražavaju istim odnosom $d\Phi/dS$. Ipak postoji razlika, jer u izrazu (15.10) $d\Phi$ predstavlja fluks koji emituje površina dS, a u izrazu (15.16) $d\Phi$ predstavlja fluks koji pada na površinu dS.

Za tela koja predstavljaju samostalne izvore svetlosti osvetljaj L ne zavisi od osvetljenosti E. Medjutim, kod tela koja emituju svetlost na račun rasejavanja ili transmisije upadne svetlosti, osvetljaj je uslovljen osvetljenošću. Ukoliko je osvetljenost tela veća, utoliko je osvetljaj njegove površine veći. To se može izraziti na sledeći način

$$L = RE, \tag{15.23}$$

i važi za slučaj kada površina reflektuje svetlost. Ovde je R koeficijent refleksije. Za površine kod kojih se osvetljaj stvara transmisijom, tj. prenošenjem svetlosne energije kroz telo, veza izmedju osvetljaja i osvetljenosti je

$$L = TE, \tag{15.24}$$

gde je T koeficijent transmisije. Koeficijenti R i T su uvek manji od jedinice.

Većina tela selektivno rasipa i propušta svetlost, tj za njih su R i T različiti za različite talasne dužine. Takva tela se zapažaju kao obojena kada na njih pada bela svetlost. Rasejana svetlost se razlikuje po svom sastavu od bele svetlosti i izaziva odredjen osećaj boje.

Ako je za površinu nekoga tela R isto za sve talasne dužine vidljive svetlosti i približno jednako jedinici, onda se takvo telo naziva **belo**. Ovakav slučaj se pojavljuje kod površina pokrivenih slojem magnezijuma ili površine svežeg snega gde je $R \approx 0,9$. Ako je za neku površinu R konstantno i veoma malo za sve talasne dužine vidljivog spektra, onda se takvo telo naziva **crno**. Na primer, kod crnih mat-površina je $R \approx 0,01$. Za idealno bela tela je $R = 1$ i $T = 0$, a za idealno crna tela je $R = 0$ i $T = 0$, dok je za idelano transmisiona tela $T = 1$. Za idealno bela i idealno transmisiona tela je

$$L = E \tag{15.25}$$

pošto nema gubitka svetlosne energije.

Svetlosna ekspozicija predstavlja proizvod osvetljenosti površine i vremena trajanja osvetljavanja, tj.

$$H = E\,t. \tag{15.26}$$

Energetska jedinica je Ws/m^2, a vizuelna $lx\,s$.

Refleksiona moć predstavlja odnos izmedju osvetljaja i osvetljenosti

$$\kappa = \frac{L}{E}. \tag{15.27}$$

16. Geometrijska optika

16.1 Zakoni geometrijske optike

Za rešavanje niza problema kao što su formiranje svetlosnog snopa, obrazovanje likova i slično, nije neophodno koristiti talasnu teoriju svetlosti. U prvoj aproksimaciji može se smatrati da se svetlost u homogenim i izotropnim sredinama kreće duž odredjenih linija, koje se nazivaju svetlosni zraci. Oni predstavljaju pravce prostiranja svetlosne energije. Za rešavanje zadataka ovakve vrste primenjuju se geometrijske metode, a deo optike koja obradjuje tu problematiku naziva se *geometrijska optika*. Geometrijska optika predstavlja granični slučaj kada talasna dužina upotrebljene svetlosti teži nuli ($\lambda \to 0$). U tom slučaju se mogu zanemariti pojave interferencije, difrakcije i polarizacije. Osnovu geometrijske optike čine četiri zakona. Prvi zakon je *zakon pravolinijskog prostiranja svetlosti*. On se odnosi na homogene sredine i jasno se manifestuje pri obrazovanju senke neprovidnih tela.

Drugi zakon je *zakon nezavisnog prostiranja svetlosnih zraka*. On se može formulisati na sledeći način: *do uzajamnog dejstva dva svetlosna zraka dolazi na mestu njihovog susreta, a dalje se kreću nezavisno.*

Treći zakon, ili zakon odbijanja svetlosnih zraka od odredjenih graničnih površina glasi: a) *upadni ugao svetlosnog zraka jednak je odbojnom uglu*, b) *upadni i odbojni zrak leže u istoj ravni sa normalom na graničnu površinu u tački upada zraka*. Ovaj zakon važi za slučajeve pravilnog odbijanja svetlosti, kada se zraci odbijaju od glatkih, brušenih i optički poliranih površina. To su površine kod kojih su neravnine manje od talasne dužine upotrebljene svetlosti. Ako je površina hrapava, svetlosni zraci se odbijaju difuzno, u svim pravcima, tj. vrši se njihovo rasejavanje.

Četvrti zakon ili zakon prelamanja svetlosti na ravnoj graničnoj površini izmedju dve nepokretne, homogene i izotropne sredine glasi: a) *sinusi upadnog i prelomnog ugla odnose se kao brzine prostiranja svetlosti u tim sredinama*, b) *upadni i prelomni zrak leže u istoj ravni sa normalom na graničnu površinu koja prolazi kroz tačku preloma*. Ako je brzina prostiranja svetlosti u sredini iz koje zrak dolazi veća od brzine u sredini u koju zrak prelazi, on se lomi ka normali. U suprotnom slučaju, prema zakonu reciprociteta kretanja svetlosnih zraka, lomi se od normale.

16.2 Prelamanje svetlosti kroz prizmu

Na slici 16.1 prikazana je trostrana prizma od optičkog materijala sa poliranim stranama AC i AB (optička prizma), sa uglom pri vrhu θ (ugao prizme). Indeks prelamanja materijala prizme je n. Prizma se nalazi u vazduhu ($n_o \approx 1$). Monohromatski svetlosni zrak pada na graničnu površinu AC, u tačku O, pod uglom α_1 i prelama se ka normali, pod uglom β_1. Na drugu graničnu površinu AB, u tačku O', pada pod uglom β_2 i lomi se od normale, pod uglom α_2. Posle dvostrukog prelamanja zrak skrene za ugao δ, koji se naziva *ugao skretanja* ili *ugao devijacije*. Ovaj ugao je jednak

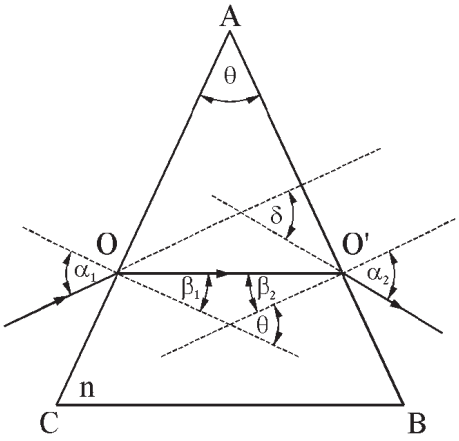
$$\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2). \tag{16.1}$$

Najmanje skretanje nastaje kada je $\alpha_1 = \alpha_2$, tj. kada se zrak posle prelamanja na graničnoj površini AC kreće paralelno osnovi prizme. Za ovaj slučaj ugao skretanja je

$$\delta_{min} = 2\alpha_1 - \theta, \tag{16.2}$$

ili

$$\alpha_1 = \frac{\delta_{min} + \theta}{2}. \tag{16.3}$$



Sl. 16.1: Prelamanje svetlosnog zraka kroz prizmu

Zakon prelamanja za tačku O može se napisati u obliku

$$\sin\alpha_1 = n\,\sin\beta_1. \tag{16.4}$$

Zamenom vrednosti za α_1 iz izraza (16.3) u (16.4), i $\beta_1 = \theta/2$ dobija se izraz iz koga se može izračunati indeks prelamanja materijala prizme

$$n = \frac{\sin\left(\delta_{min} + \theta\right)/2}{\sin\left(\theta/2\right)}. \tag{16.5}$$

Ako su α, θ i n male veličine, i ako je ispunjen uslov približno minimalnog skretanja svetlosnog zraka, onda su sinusi upadnog i prelomnog ugla približno jednaki samim tim uglovima, pa se zakon prelamanja svtelosti na dvema uočenim površinama može napisati u obliku:

$$\alpha_1 \approx n\,\beta_1, \quad \alpha_2 \approx n\,\beta_2 \tag{16.6}$$

i

$$\alpha_1 + \alpha_2 = n\,(\beta_1 + \beta_2) = n\,\theta. \tag{16.7}$$

Zamenom vrednosti za $\alpha_1 + \alpha_2$ iz izraza (16.7) u (16.1), za ugao devijacije δ svetlosnog zraka se dobija

$$\delta = \theta(n - 1). \tag{16.8}$$

Kao što se vidi, ugao devijacije je funkcija ugla prizme i indeksa prelamanja materijala prizme.

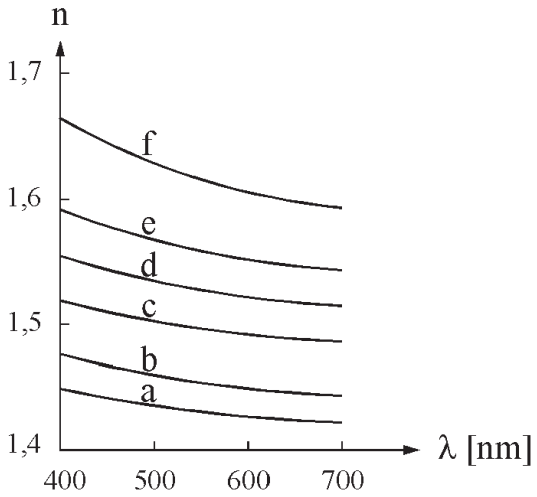
16.3 Disperzija svetlosti. Spektri

Pri razmatranju prelamanja svetlosti kroz planparalelnu ploču i prizmu pretpostavljalo se da svetlost sadrži zrake samo jedne talasne dužine, tj. da je monohromatska. Medjutim, svetlost se u većini slučajeva razmatra kao skup većeg broja zraka raznih talasnih dužina, zbog čega se naziva *polihromatska svetlost*. Brzina svetlosti u vakuumu je, bez obzira na talasnu dužinu ista. Ali, pri prostiranju svetlosti kroz različite providne materijale, njena brzina, a samim tim i indeks prelamanja su funkcije talasne dužine. Prema tome, pri propuštanju polihromatske svetlosti kroz ovakve materijale dolazi do razlaganja svetlosti po talasnim dužinama. Ova pojava se naziva *disperzija*.

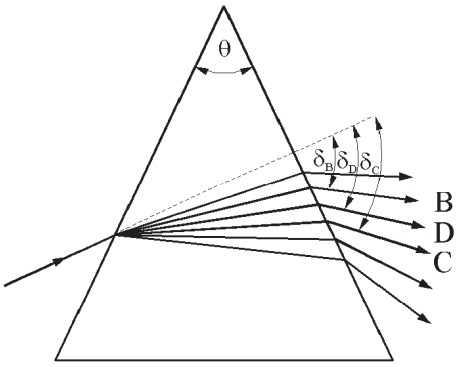
Na slici 16.2 data je zavisnost indeksa prelamanja od talasne dužine svetlosti, za nekoliko optičkih materijala. Sa slike se vidi da se sa povećanjem talasne dužine indeks prelamanja smanjuje. To smanjenje zavisi od vrste optičkog materijala.

Neka zrak bele polihromatske svetlosti pada na optičku prizmu (sl. 16.3). Pošto indeks prelamanja zavisi od talasne dužine, najviše će skrenuti ljubičasta svetlost a najmanje crvena, dok će ostale boje (indigo, plava, zelena, žuta, narandžasta) biti izmedju njih. Dakle, pri napuštanju prizme bela svetlost je razložena na boje - dobijen je *spektar polihromatske svetlosti*.

Pri razlaganju polihromatske svetlosti u spektar karakteristične su dve veličine, i to: *mera disperzije* i *disperziona moć*. Mera disperzije ili disperzija predstavlja razliku dva ugla skretanja. Neka je δ_B ugao



Sl. 16.2: Indeks prelamanja u funkciji talasne dužine za neke optičke materijale
a) fluorit, b) topljeni kvarc,
c) silikatno kron staklo,
d) kvarc, e) borno flint staklo,
f) silikatno flint staklo



Sl. 16.3: Razlaganje polihromatske svetlosti pomoću optičke prizme

skretanja zraka svetlosti B, a δ_C ugao skretanja zraka svetlosti C. Tada razlika $\delta_C - \delta_B$ predstavlja meru disperzije. Ako su upadni ugao polihromatske svetlosti, indeks prelamanja prizme i ugao prizme mali, i ako je ispunjen uslov približno minimalnog skretanja svetlosnog zraka, tada se za uglove skretanja može primeniti izraz (16.8), pa je

$$\begin{aligned} \delta_B &= (n_B - 1)\theta, \\ \delta_C &= (n_C - 1)\theta. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Za meru disperzije se dobija sledići izraz:

$$\delta_C - \delta_B = (n_C - n_B)\theta. \tag{16.10}$$

Disperziona moć predstavlja odnos mere disperzije $\delta_C - \delta_B$ i ugla skretanja središnjeg zraka δ_D u spektru

$$\omega = \frac{\delta_C - \delta_B}{\delta_D} = \frac{n_C - n_B}{n_D - 1}. \tag{16.11}$$

Recipročna vrednost disperzione moći naziva se Abeov (Abbe) broj ν

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_C - n_B}. \tag{16.12}$$

Oblik spektra zavisi od karaktera svetlosnog izvora. Razlikuju se tri osnovna tipa spektra: *kontinualni*, *linijski* i *trakasti*.

Kod kontinualnog (neprekidnog) spektra prisutne su sve boje (talasne dužine), pri čemu je prelaz od jedne boje na drugu postepen. Kontinualni spektri nastaju kao posledica medjusobnog dejstva velikog broja molekula i atoma u telu koje zrači. Osnovnu ulogu u emisiji igra haotično, oscilatorno i rotaciono kretanje ovih čestica usled povećane temperature.

Linijski spektar se sastoji od niza diskretnih linija koje predstavljaju odredjene talasne dužine. Širina tih linija nije beskonačno mala, već sadrži odredjen interval talasnih dužina. To je slučaj kod gasova na niskim pritiscima. Emisija je uslovljena prelazom vezanih elektrona sa viših na niže energetske nivoe (orbite) u atomu.

Trakasti spektar se sastoji iz velikog broja linija koje su poredjane u odredjenim grupama. Pri posmatranju ovakvog spektra pomoću spektralnih aparata male moći razlaganja oni izgledaju kao trake, koje su medjusobno odvojene tamnim poljima. Svakoj traci spektra odgovara odredjen interval talasnih dužina. Trakaste spektre emituju pojedini (slobodni) molekuli. Emisija je izazvana kako elektronskim prelazima, tako i oscilatornim i rotacionim kretanjem atoma u molekulu.

Iz napred izloženog proizilazi da čvrsta tela, kao i gasovi na visokom pritisku, daju kontinualni emisioni spektar. Linijski i trakasti emisioni spektri karakteristični su za razredjene gasove (pobudjene atomi i molekuli, na primer, zagrevanjem ili električnim pražnjenjem). Spektar jednoatomnih gasova (plemeniti gasovi) je linijski, a višeatomskih (kiseonik, azot, ugljovodonici, vodena para itd.) trakast.

Svaki hemijski element (koji se nalazi u stanju razredjenog gasa ili pare) ima svoj karakterističan emisioni spektar, koji se od spektra ostalih elemenata razlikuje po broju i rasporedu linija. Na ovim osobinama se zasniva *spektralna analiza* (spektralni metod za odredjivanje sastava materijala).

Ako se iz izvora koji daje kontinualni spektar, svetlost prethodno propušta kroz razredjeni gas (ili paru), onda će se u spektru pojaviti tamne linije (ili trake) koje odgovaraju linijama (ili trakama) emisionog spektra datog gasa. Takva vrsta spektra naziva se *apsorpcioni spektar*, koji nastaje zbog toga što, shodno Kirhofovom zakonu, gas apsorbuje iste linije spektra koje emituje. Primer apsorpcionog spektra je apsorpcija u Sunčevoj atmosferi (fotosfera): na kontiniualnom emisionom spektru Sunca jasno se primećuju tamne apsorpcione linije, koje se nazivaju *Fraunhoferove* (Fraunhofer) *linije*. Sa izvesnim izuzecima nekih linija fotografisani apsorpcioni i emisioni spektri jednog elementa izgledaju kao negativ i pozitiv nekog predmeta u klasičnoj fotografiji.

Proučavanje spektara ima veoma veliku ulogu u objašnjenju procesa koji nastaju u atomima i molekulima, kao i za upoznavanje strukture materijala.

16.4 Totalna refleksija. Optička vlakna

Totalna refleksija (potpuno odbijanje) je pojava odbijanja svetlosti od granične površine koja razdvaja dve sredine različitih indeksa prelamanja. Ona nastaje kada svetlosni zraci nailaze iz optički gušće sredine (većeg indeksa prelamanja) na graničnu površinu. Primer totalne refleksije prikazan je na slici 16.4. Svetlosni zraci od tačkastog svetlosnog izvora O, koji se nalazi u sredini sa indeksom prelamanja n, pada na graničnu površinu koja razdvaja ovu sredinu od sredine sa indeksom prelamanja n ($n > n_o$). Pri prelazu iz jedne sredine u drugu, zraci se prelamaju po zakonu:

$$n \sin\alpha = n_o \sin\beta, \tag{16.13}$$

pri čemu je uvek $\beta > \alpha$. Promenom upadnog ugla α, prelomni ugao se može menjati od 0^o do 90^o. Upadni ugao α_g, pri kome je prelomni ugao jednak 90^o naziva se *granični* ili *kritični ugao totalne refleksije*. Ako je upadni ugao veći od α_g, zrak se vraća u istu sredinu. Tada se kaže da je nastupila totalna refleksija.

Granični ugao totalne refleksije može se odrediti iz izraza (16.13), uzimanjem da je $\beta = 90^o$

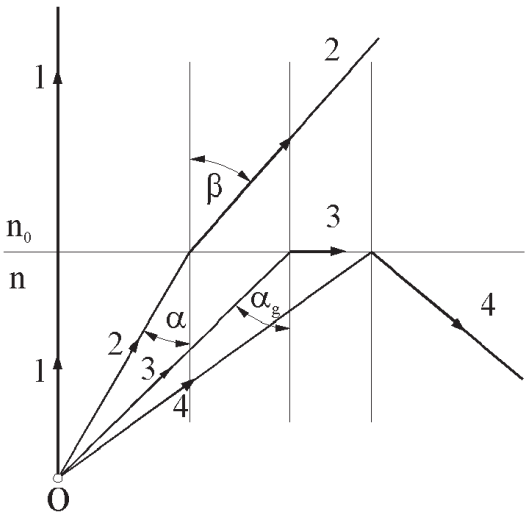
$$\sin\alpha_g = \frac{n_o}{n}. \tag{16.14}$$

Za sredinu voda-vazduh granični ugao totalne refleksije iznosi:

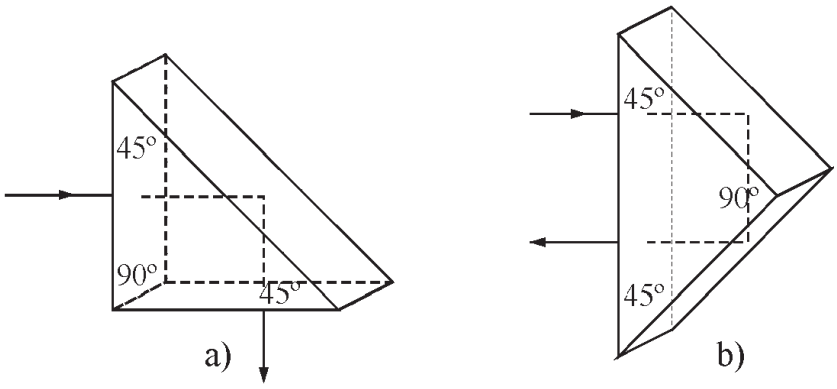
$$\alpha_g = \arcsin\frac{1}{1,33} = 48,5^o. \tag{16.15}$$

Totalna refleksija u optičkim prizmama se koristi kod optičkih instrumenata. Zahvaljujući ovoj pojavi moguće je skrenuti svetlosni zrak za 90^o (sl. 16.5.a), 180^o (sl. 16.5.b) i druge uglove.

Na principu totalne refleksije rade *optička vlakna* ili *svetlovodi*. Optičko vlakno predstavlja dielektričnu nit kružnog preseka, koja se sastoji iz dva sloja, unutrašnjeg, providnog, koji se naziva *jezgro* i spoljašnjeg,

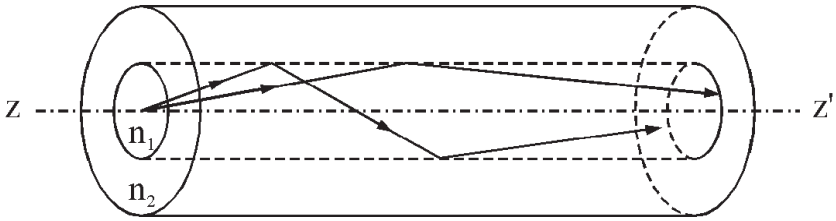


Sl. 16.4: Uz objašnjenje totalne refleksije



Sl. 16.5: Totalna refleksija zraka pomoću prizme

koje se naziva *omotač* vlakna (sl. 16.6). Indeks prelamanja jezgra n_1 je nešto veći od indeksa prelamanja omotača n_2. Svetlosni zraci koji ulaze u jezgro vlakna pod malim uglom u odnosu na zz' osu naići će na optički redju sredinu na granici jezgra i omotača, pod uglom koji je veći od graničnog zbog čega će doći do totalne refleksije. Na taj način, količina svetlosti koja je ušla u vlakno pod navedenim uslovima prostiraće se duž vlakna bez osetnih gubitaka.

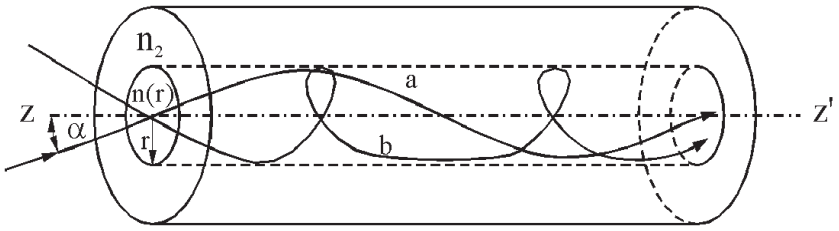


Sl. 16.6: Vodjenje zraka u vlaknu sa jezgrom konstantnog indeksa prelamanja

Osnovno ograničenje pri prenosu informacija ovakvim optičkim vlaknom nastaje usled širenja kratkotrajnih svetlosnih impulsa zbog različitog vremena prostiranja svetlosti duž ose svetlovoda i pod nekim uglom u odnosu na osu.

Karakteristike prenosa optičkog vlakna mogu se znatno poboljšati primenom vlakana kod kojih indeks prelamanja jezgra kontinualno opada duž radijalne koordinate. To su *gradijentna optička vlakna*. S obzirom na to da se indeks prelamanja jezgra menja kod gradijentnog vlakna, zraci se u jezgru prostiru po krivolinijskim putanjama. Tipičan izgled dve grupe podataka (zraci koji padaju u ravni optičke ose i onih koji se mimoilaze se sa njom) prikazan je na slici 16.7. I kod njih je karakteristično da se putanja

zraka povećava sa povećanjem upadnog ugla. S obzirom da se prostire kroz optički redju sredinu, brzina tog zraka je veća od brzine zraka koji se prostire blizu optičke ose vlakna.



Sl. 16.7: Prostiranje zraka u vlaknu sa gradijentnom promenom indeksa prelamanja u jezgru
a) zraci koji padaju u ravni optičke ose
b) zraci koji se mimoilaze u odnosu na optičku osu

Pomoću optičkih vlakana se vrši prenos informacija na osnovu modulacije svetlosti (najčešće promenom intenziteta). Kvalitetno izradjenim vlaknima mogu se preneti informacije na znatno veće daljine nego, žičanim sistemima. Sem toga, ovim vlaknima se može preneti znatno veći broj impulsa (informacija) u jedinici vremena nego klasičnim provodnikom električnih signala.

Vlakna se koriste za prenos slike, zatim, u medicini za pregled unutrašnjih organa bez razaranja tkiva itd.

16.5 Sferna sočiva i njihova podela

Pod sfernim sočivom se podrazumeva telo od providnog optičkog materijala, ograničeno sa dve optički polirane sferne površine, koje predstavljaju prelomne površine svetlosnih zraka. Nekada se izradjuju sočiva, koja su sa po jednom površinom čvrsto spojena (optički kontakt) i imaju zajedničku optičku osu. Tada se govori o sočivima sa tri i više prelomnih površina. Više od dve sferne prelomne površine ima takodje sistem na zajedničkoj optičkoj osi, sastavljen od sfernih sočiva odvojenih tečnom ili gasovitom sredinom, različitih indeksa prelamanja.

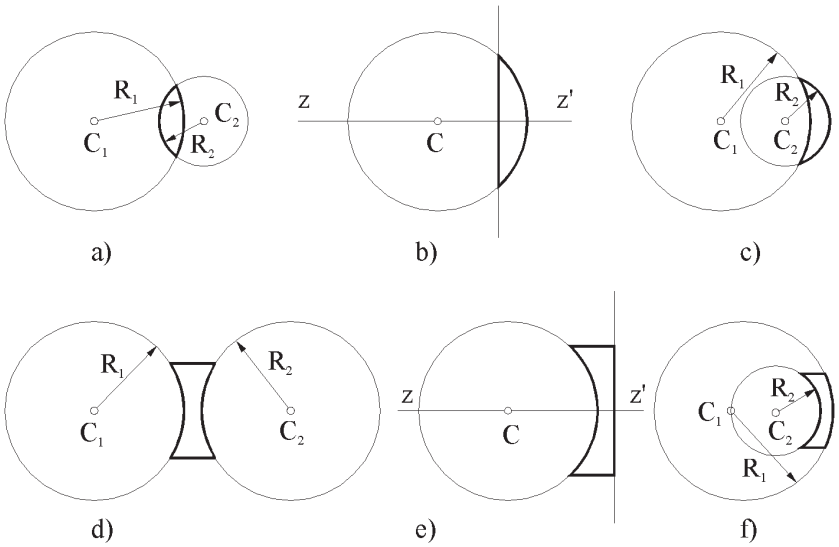
Sočiva se najčešće izradjuju od stakla, kvarca, natrijum hlorida i sličnih materijala. Ako sočiva imaju samo dve prelomne površine (obično su obe sferne ili jedna ravna, a druga sferna), nazivaju se *prosta sočiva*.

Na slici 16.8 prikazane su vrste prostih sočiva i njihovi osnovni elementi: prava zz' koja prolazi kroz centre krivina naziva se optička osa sočiva; R_1 i R_2 su poluprečnici krivina sočiva. Granične površine sočiva mogu biti ispupčene (konveksne), izdubljene (konkavne) i ravne (planarne), pa shodno tome i sočiva mogu biti bikonveksna, plankonveksna i konkavno-konveksna, odnosno bikonkavna, plankonkavna i konveksno-konkavna (sl. 16.8).

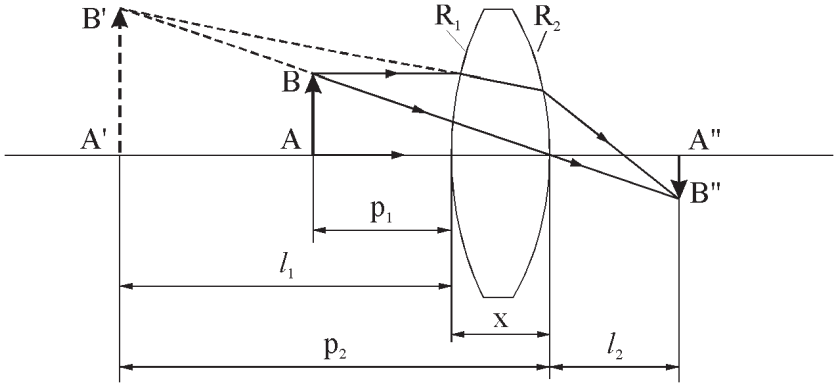
Sočiva se mogu podeliti na *tanka* i *debela*. Sočivo je tanko ako je njegova debljina znatno manja od poluprečnika sfernih površina koje ga obrazuju. Kod takvog sočiva može se zanemariti pomeranje svetlosnog zraka pri prolasku kroz centar. Ako pomenuti uslov nije ispunjen, sočiva se nazivaju debela. Sočiva kod kojih prelomljeni zraci seku optičku osu nazivaju se *sabirna*, a sočiva kod kojih se prelomljeni zraci udaljavaju od optičke ose nazivaju se *rasipna*. Ovo važi za slučaj kada je indeks prelamanja materijala sočiva veći od indeksa prelamanja sredine u kojoj se ono nalazi.

16.6 Jednačina tankog sočiva

Na slici 16.9 prikazano je prostiranje svetlosnih zraka u prostom bikonveksnom sočivu debljine x, koji potiču od predmeta AB. Ovaj predmet se nalazi na rastojanju p_1 od prve granične površine. Prelamanjem svetlosnih zraka na toj graničnoj površini obrazuje se virtuelan lik $A'B'$, na rastojanju l_1 od prve granične površine. Lik $A'B'$ služi kao predmet za drugu graničnu površinu, koja se od nje nalazi na rastojanju p_2. Prilikom prelamanja svetlosti obrazuje se realan lik $A''B''$, na rastojanju l_2 od druge granične površine.



Sl. 16.8: Vrste sočiva
a) bikonveksno, b) plankonveksno, c) konkavno-konveksno, d) bikonkavno,
e) plankonkavno i f) konveksno-konkavno



Sl. 16.9: Formiranje lika predmeta sabirnim sočivom

Ako je debljina sočiva x mnogo manja od veličina p_1, l_1, p_2 i l_2, može se uzeti da je $l_1 \approx p_2$. Neka je indeks prelamanja sočiva n, a indeks prelamanja sredine u kojoj se sočivo nalazi $n_o = 1$. Korišćenjem jednačine za prelamanje svetlosti na prvoj graničnoj površini sočiva dobija se

$$\frac{1}{p_1} - \frac{n}{l_1} = \frac{n-1}{R_1}, \tag{16.16}$$

a na drugoj

$$\frac{n}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1-n}{R_2}, \tag{16.17}$$

gde su R_1 i R_2 poluprečnici krivina prve i druge granične površine. Sabiranjem jednačina (16.16) i (16.17), s obzirom da je $l_1 \approx p_2$, dobija se

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_2} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}), \tag{16.18}$$

ili, ako se rastojanja predmeta i lika od sočiva označe jednostavno samo sa p i l,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}). \tag{16.19}$$

Ako se sočivo nalazi u nekoj sredini indeksa prelamanja $n_o > 1$, tada jednačina (16.19) dobija sledeći oblik:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = (\frac{n}{n_o} - 1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}). \tag{16.20}$$

Potrebno je da se definiše žižna daljina f tankog sočiva, koja predstavlja rastojanje lika od sočiva kada se predmet nalazi u beskonačnosti. Za $p \to \infty$, $f \to l$, pa jednačina (16.19) dobija sledeći oblik

$$\frac{1}{f} = (n - 1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}). \tag{16.21}$$

Prema tome, jednačina (16.19) se može napisati u jednostavnijem obliku:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}. \tag{16.22}$$

Ova jednačina je poznata pod nazivom *jednačina tankog sočiva*. Pomoću nje se može odrediti žižna daljina sočiva ako su poznata rastojanja lika i predmeta od sočiva.

Tanko sočivo se karakteriše dvema žižama koje se formiraju u preseku prelomljenih zraka, sa leve i desne strane sočiva. Ovo je ilustrovano na slici 16.10 za bikonveksno (pozitivno f) i bikonkavno (negativno f) sočivo.

U tabeli 16.1 dati su konvencionalno usvojeni znaci veličina kod tankih sočiva.

Tabela 16.1: Konvencionalno usvojeni znaci kod tankih sočiva

p je + ako se predmet nalazi ispred sočiva
p je – ako se predmet nalazi iza sočiva
l je + ako se lik formira iza sočiva
l je – ako se lik formira ispred sočiva
R_1 i R_2 su + ako je centar krivine iza sočiva
R_1 i R_2 su – ako je centar krivine ispred sočiva

Podela sočiva na sabirna i rasipna može se izvršiti i na osnovu karakteristika žiža. Ako su žiže realne, tj. ako paralelni zraci posle prelamanja kroz sočivo konvergiraju u realnoj tački (sl. 16.10.a), sočiva su sabirna ili pozitivna. Ako su, pak, žiže imaginarne, tj. ako paralelni zraci posle prelamanja divergiraju (sl. 16.10.b), sočiva su rasipna ili negativna.

Kao mera jačine prelamanja svetlosti kod sočiva koristi se veličina koja se naziva *optička jačina (moć)* ω i izražava se na sledeći način:

$$\omega = \frac{n}{f}, \tag{16.23}$$

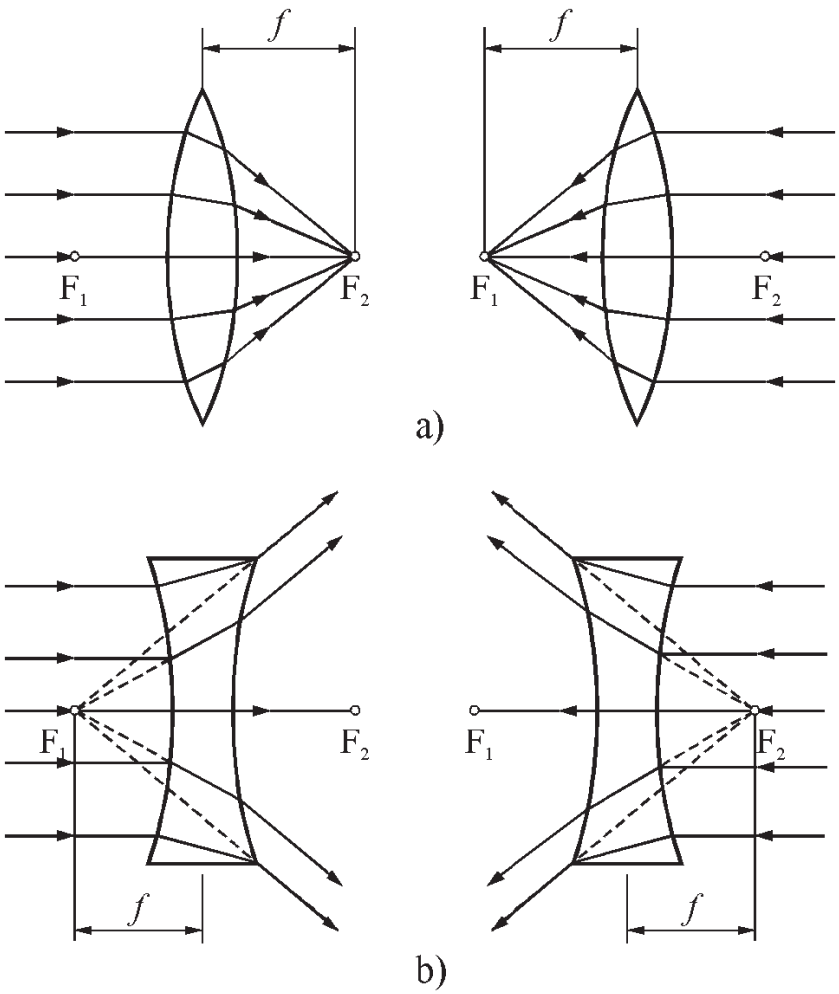
gde je n indeks prelamanja sredine u kojoj se sočivo nalazi. Za sočivo koje se nalazi u vazduhu ($n_o \approx 1$) optička jačina je

$$\omega = \frac{1}{f}. \tag{16.24}$$

Optička jačina se izražava u dioptrijama (D) kada se žižna daljina izrazi u metrima. Sabirna sočiva se označavaju pozitivnom vrednošću optičke jačine, a rasipna negativnom vrednošću. Tako na primer, kada neko nosi naočari sa dioptrijom od 2,0 to označava da je žižna daljina upotrebljenih sočiva $f = 1/2,0 = 0,5\,m$.

Do izraza za transverzalno uvećanje tankog sočiva može se doći iz uvećanja pri prelamanju svetlosti na sfernoj graničnoj površini. Kada se taj izraz primeni na dve granične površine tankog sočiva, dobija se odgovarajuće uvećanje pri prelamanju na svakoj od njih

$$U_1 = -\frac{nl_1}{n'p_1},$$
$$U_2 = -\frac{n'l_2}{np_2}. \tag{16.25}$$



Sl. 16.10: Uz objašnjenje žižne daljine sočiva

Ukupno uvećanje jednako je proizvodu uvećanja na pojedinačnim graničnim površinama

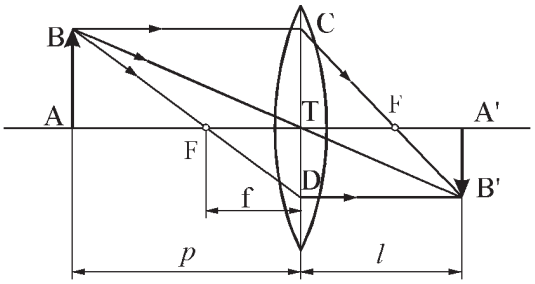
$$U = U_1 U_2 = \frac{l_1}{p_2}\frac{l_2}{p_2}. \tag{16.26}$$

16.7 Dobijanje lika pomoću tankog sočiva

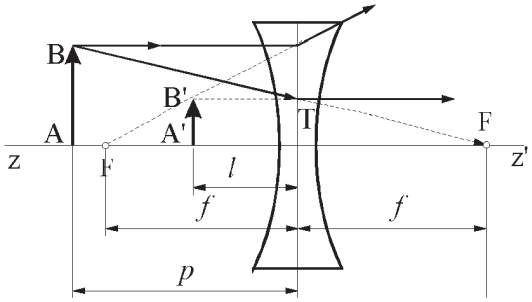
Na slici 16.11 prikazana je šema dobijanja lika predmeta konačnih dimenzija pomoću bikonveksnog sočiva. Predmet AB se nalazi u ravni, koja je normalna na optičku osu zz', na rastojanju p od centra sočiva. Lik $A'B'$ se dobija u ravni, koja je takodje normalna na optičku osu zz', i nalazi se na rastojanju l od sočiva. Rastojanja p i l su medjusobno povezana jednačinom (16.22). Za dobijanje lika, na primer tačke B, prati se tok karakterističnih zraka. Prvi (BC) kreće paralelno optičkoj osi i posle prelamanja prolazi kroz žižu. Drugi zrak (BF) prolazi kroz žižu F i posle prelamanja kroz sočivo kreće se paralelno sa optičkom osom, a treći (BT) kroz centar sočiva. Pošto se radi o tankom sočivu, pomeranje zraka svetlosti u sočivu se može zanemariti. Zrak koji prolazi kroz centar sočiva se ne prelama. Po izlasku iz sočiva, zraci se seku u tački B', koja predstavlja lik tačke B. Sličnim postupkom mogu se dobiti i ostale tačke lika predmeta AB. Njihov skup predstavlja lik $A'B'$.

Dobijanje lika pomoću rasipnog sočiva prikazano je na slici 16.12. Da li će lik biti uvećan ili umanjen u odnosu na predmet, zavisi od rastojanja predmeta i sočiva. Odnos linearnih dimenzija lika i predmeta naziva se *linearno* ili *transverzalno uvećanje* U tankog sočiva

$$U = \frac{A'B'}{AB} = \frac{l}{p}. \tag{16.27}$$



Sl. 16.11: Formiranje lika tankim sabirnim sočivom



Sl. 16.12: Formiranje lika tankim rasipnim sočivom

Za rešavanje niza naučnih i tehničkih problema u većini slučajeva primenjuje se kombinacija sabirnih i rasipnih sočiva, koja daje široke mogućnosti za konstrukciju raznih optičkih sistema.

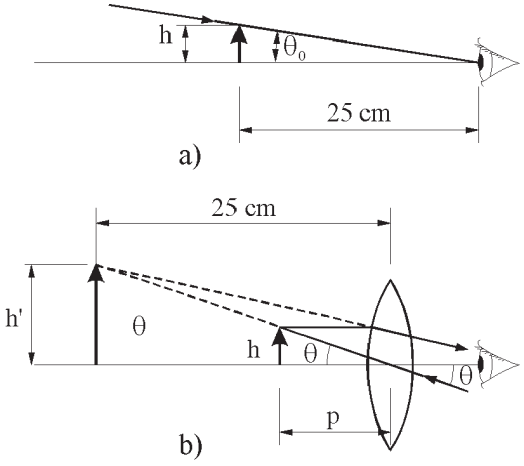
16.8 Optički instrumenti

Optički sistemi sastavljeni od sočiva, prizmi, ogledala itd., koji su mehanički povezani sa ciljem da se dobiju potrebni podaci (likovi, spektri itd.) raznih predmeta, čine optički instrument. Postoji više vrsta optičkih instrumenata. Ovde će biti razmatran princip rada nekih od njih.

16.8.1 Lupa

Lupa (uveličavajuće staklo ili prost mikroskop) je najprostiji optički instrument, koji se najčešće sastoji od jednog sabirnog sočiva i služi za posmatranje malih predmeta na bliskim rastojanjima.

Poznato je da veličina lika na mrežnjači oka zavisi od ugla pod kojim se vidi predmet. Da bi lik bio što veći, a time i ugao pod kojim se vidi lik, potrebno je predmet što više približiti oku. Medjutim, oko nije u stanju da oštro fokusira predmet na rastojanjima manjim od daljine jasnog vida. Prema tome, ako je predmet na daljini jasnog vida, oko ga vidi pod maksimalnim uglom (sl. 16.13.a). Obično se u tehnici za daljinu jasnog vida uzima $25\,cm$ (sl. 16.13.a).



Sl. 16.13: Posmatranje predmeta
a) bez lupe,
b) sa lupom

Za povećanje ugla pod kojim se vidi predmet potrebno je postaviti sabirno sočivo ispred oka sa predmetom koji je lociran u tački O, koja je veoma bliska žiži sočiva (sl. 16.13.b). U tom slučaju sočivo

formira virtuelan, uspravan i uvećan lik, kao što je prikazano na slici. Dakle, sočivo povećava ugao pod kojim se jasno vidi predmet. *Ugaono uvećanje* W se definiše kao odnos ugla pod kojim se vidi predmet sa lupom (ugao θ na sl. 16.13.b) i bez lupe (ugao θ_o na sl. 16.13.a):

$$W = \frac{\theta}{\theta_o}. \tag{16.28}$$

Ugaono uvećanje je maksimalno kada se lik nalazi na daljini jasnog vida, tj. kada je $l = -25\,cm$ (znak minus pokazuje da je lik virtuelan). Rastojanje predmeta koje odgovara ovom rastojanju lika može se izračunati iz jednačine tankog sočiva:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25\,cm} = \frac{1}{f},$$

odnosno

$$p = \frac{25f}{25+f},$$

gde je f žižna daljina sočiva izražena u centimetrima. Ako se radi o malim uglovima, može se uzeti da je

$$\theta_o \approx \tan\theta_o = \frac{h}{25}, \tag{16.29}$$
$$\theta \approx \tan\theta = \frac{h}{f}$$

Zamenom izraza za θ_o i θ u izraz (16.28) dobija se

$$W = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{h/p}{h/25} = \frac{25}{p} = \frac{25}{25f/(25+f)},$$

odnosno

$$W = 1 + \frac{25\,cm}{f}. \tag{16.30}$$

Oko može jasno uočiti lik koji se formira izmedju daljine jasnog vida i beskonačnosti. Medjutim, oko je najmanje napregnuto kada je lik u beskonačnosti. U tom slučaju, da bi se lik koji daje lupa nalazio u beskonačnosti, predmet mora da se nadje u žiži sočiva. Tada je

$$\theta_o \approx \frac{h}{25}; \quad \theta \approx \frac{h}{f},$$

pa je uvećanje

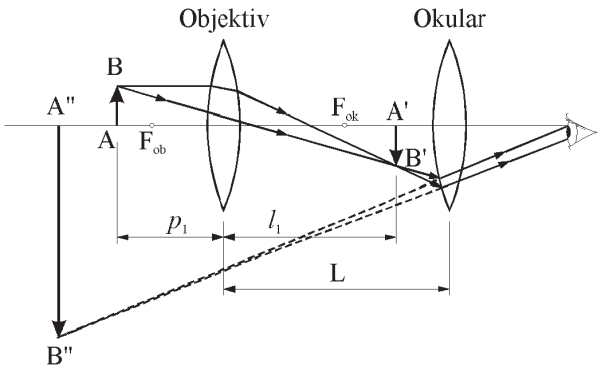
$$W = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{25\,cm}{f}. \tag{16.31}$$

Žižna daljina sočiva koje se upotrebljava kao lupa kreće se približno od 1 do $5\,cm$, iz čega sledi da se lupom mogu dobiti uvećanja oko 20 puta. Uvećanje lupom se obično označava brojem i oznakom "x" iznad njega. Na primer 20^x označava dvadesetostruko uvećanje.

16.8.2 Optički mikroskop

Za posmatranje vrlo sitnih predmeta na bliskim rastojanjima potrebna su značajna uvećanja, koja se ne mogu dobiti pomoću lupe. U tu svrhu koristi se složeniji optički instrument, koji se naziva mikroskop.

Uprošćena šema optičkog mikroskopa prikazana je na slici 16.14. On se sastoji od objektiva, koji je veoma male žižne daljine f_{ob} ($f_{ob} < 1\,cm$) i okulara ili lupe, žižne daljine f_{ok} nekoliko centimetara. Ova dva sočiva se nalaze na rastojanju L koje je mnogo veće od obe žižne daljine f_{ob} i f_{ok}. Predmet AB se postavlja blizu žiže objektiva. Pomoću objektiva se formira realan i invertovan lik $A'B'$, koji se nalazi blizu žiže okulara. Okular formira lik $A''B''$ od lika $A'B'$, koji je virtuelan i takodje invertovan u odnosu



Sl. 16.14: Optički mikroskop

na predmet. Transverzalno uvećanje U prvog lika je $-l_1/p_1$. Pošto je l_1 približno jednako L, i kako je predmet vrlo blizu žiži objektiva (može se uzeti da je $p \approx f_{ob}$), za transverzalno uvećanje objektiva se dobija

$$U \approx -\frac{L}{f_{ob}}.$$

Ugaono uvećanje okulara predmeta (za okular, kao predmet uzima lik $A'B'$ koji formira objektiv) koji se nalazi blizu njegove žiže, saglasno izrazu (16.31) je

$$W = \frac{25\,cm}{f_{ok}}.$$

Ukupno uvećanje mikroskopa se definiše kao proizvod transverzalnog uvećanja objektiva i ugaonog uvećanja okulara:

$$M = UW = -\frac{L}{f_{ob}}\frac{25\,cm}{f_{ok}}. \tag{16.32}$$

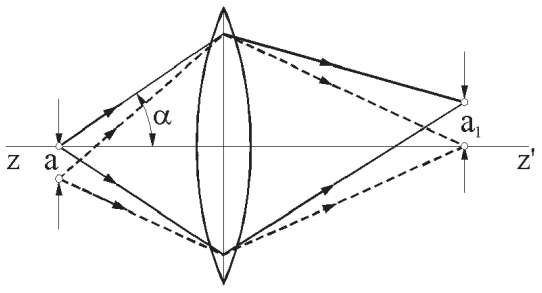
Negativan znak pokazuje da je lik invertovan.

Optički mikroskopi se u tehnici obično koriste za dobijanje uvećanja od 1500 do 2000 puta. Objektiv i okular mikroskopa predstavljaju složen sistem sočiva kod kojih je odstranjena sferna aberacija.

Uvećanje optičkim mikroskopom ograničeno je talasnom dužinom svetlosti. Najmanje rastojanje a, izmedju dve tačke koje se mogu jasno razlikovati mikroskopom, dato je izrazom

$$a = 0,61\frac{\lambda}{n\sin\alpha}, \tag{16.33}$$

gde je λ talasna dužina upotrebljene svetlosti, n indeks prelamanja sredine u kojoj se nalazi predmet i α polovina ugla koji zaklapaju periferni zraci, koji polaze od posmatranog predmeta ka ivicama objektiva (sl. 16.15). Proizvod $n\sin\alpha$ se naziva *numerički otvor* ili *numerička apertura objektiva*. Često se veličina a naziva i *granica razlaganja*.



Sl. 16.15: Uz objašnjenje moć razlaganja mikroskopa

Veličina $\sigma = 1/a$ naziva se *moć razlaganja mikroskopa*, tj.

$$\sigma = \frac{n\sin\alpha}{0,61\lambda}. \tag{16.34}$$

Iz izraza (16.34) vidi se da, ako se želi mikroskop sa velikom moći razlaganja za konstantnu talasnu dužinu, numerička apertura objektiva treba da bude što veća. Zbog toga je potrebno izmedju objektiva i posmatranog predmeta postaviti neku tečnost (na primer vodu ili kedrovo ulje), čiji je indeks prelamanja veći od jedinice (objektiv sa imerzijom).

Pomoću optičkog mikroskopa mogu se uočiti i predmeti čije su dimenzije manje od $\lambda/2$ upotrebljene svetlosti, ali njihovi likovi nisu jasni, već se zapažaju u obliku pega. Za posmatranje ovako sitnih predmeta koristi se mikroskop sa kondenzorom, kako bi se predmet osvetlio svetlošću što većeg intenziteta (ultramikroskop). Osvetljavanje predmeta se vrši normalno ili koso na optičku osu mikroskopa. Tako u mikroskop ulaze samo oni zraci, koji su odbijeni od čestica predmeta. Ako se, na primer, kroz mikroskop posmatra koloidni rastvor, primetiće se veliki broj sjajnih pega, od kojih svaka predstavlja lik koloidne čestice. Pomoću ultramikroskopa mogu se opaziti čestice reda nekoliko nanometara.

Da bi se povećala moć razlaganja mikroskopa, za konstantnu aperturu objektiva, potrebno je smanjiti talasnu dužinu svetlosti. Zato se ponekad umesto obične svetlosti koristi ultraljubičasta svetlost. U tom slučaju se predmet ne može posmatrati, već se vrši snimanje na fotografskoj ploči ili filmu. Za dalje povećanje moći razlaganja mikroskopa trebalo bi preći na rendgenske zrake. Medjutim, izrada odgovarajuće optike za dobijanje lika pomoću rendgenskih zraka veoma je komplikovana, zbog čega se odustalo od konstrukcije ovakvih mikroskopa.

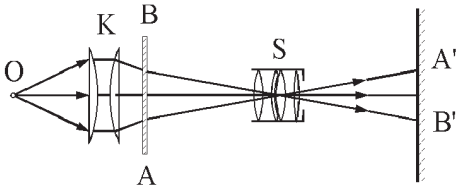
16.8.3 Projekcioni aparati

Za dobijanje realnih, jako uvećanih likova sa negativa, pozitiva, crteža, slike, teksta itd. koriste se projekcioni aparati. Po svojoj optičkoj šemi oni su suprotni fotografskom aparatu, sa specijalnim dodatkom za jako osvetljavanje lika koji se projektuje na zaklon.

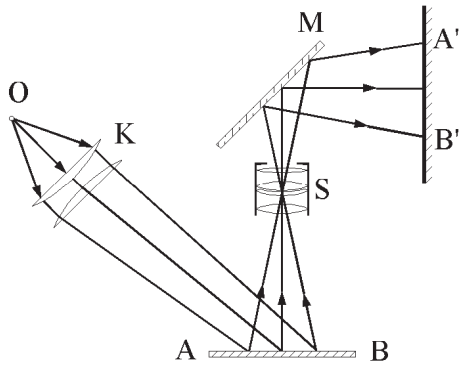
Ako je projekcioni aparat namenjen za projekciju prozračnih predmeta (fotosnimaka na staklu ili filmu), naziva se *dijaskop*. Ako je namenjen za projekciju neprozračnih predmeta, naziva se *episkop*. Obično se konstruišu projekcioni aparati koji mogu raditi i kao dijaskopi i kao episkopi, pa se nazivaju *epidijaskopi*.

Na slici 16.16 data je šema dijaskopa. Jakim svetlosnim izvorom O osvetljava se prozračni predmet AB pomoću kondenzora K (K je sistem sočiva male žižne daljine). Ova svetlost pada na objektiv S velike žižne daljine, koji vrši projekciju na zaklonu. Na zaklonu se dobija uvećan lik $A'B'$ prozračnog predmeta AB.

Šema episkopa data je na slici 16.17. Za osvetljavanje predmeta AB koristi se takodje jak svetlosni izvor čiji zraci preko kondenzora K padaju na predmet. Rasejana svetlost od neprovidnog predmeta AB, pomoću objektiva S i ogledala M, upravlja se zaklon, gde se dobija jako uvećan lik $A'B'$ predmeta AB.



Sl. 16.16: Dijaskop

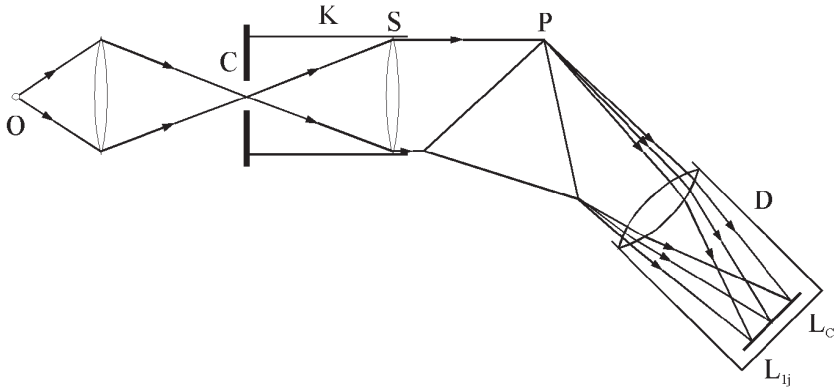


Sl. 16.17: Episkop

16.8.4 Spektralni aparati

Naročito mesto medju optičkim instrumentima zauzimaju spektralni aparati koji nisu predvidjeni za dobijanje likova svetlog predmeta, već za ispitivanje spektralnog sastava svetlosti. Važan deo spektralnog aparata čini uredjaj za razlaganje svetlosti po talasnim dužinama. Takvu ulogu vrši prizma od materijala sa znatnom disperzijom, difrakciona rešetka ili neki interferencioni uredjaj. Ovaj poslednji služi za detaljnu analizu svetlosti malog opsega talasnih dužina, jer je disperziona oblast ovih pribora vrlo ograničena.

Danas se najčešće koriste spektralni aparati sa prizmom. Zbog toga će biti detaljnije opisani, kao i njihove modifikacije. Na slici 16.18 data je optička šema spektrometra sa prizmom. Uzan prorez C se osvetljava svetlošću velikog intenziteta, koji treba analizirati. Ovaj prorez, čija se širina može menjati, postavlja se u prednju žižu ahromatskog sočiva S, koje je smešteno u kolimator K. Ovo sočivo mora biti oslobodjeno uglavnom od sferne i hromatične aberacije, kako bi omogućilo stvaranje paralelnog snopa celokupne upadne svetlosti. Iz kolimatora se prelomljeni snop zraka kreće paralelno i pada na prizmu P, koja vrši razlaganje polihromatske svetlosti po talasnim dužinama. Za razlaganje vidljive svetlosti izradjuju se prizme od stakla velike disperzije (na primer flint stakla), a za ultraljubičaste zrake upotrebljava se prizma od kvarca ili fluorita. Infracrveni spektrografi imaju optiku od kamene soli ili silvina. Za posmatranje vidljive svetlosti obično se koristi durbin D pri čemu se zapažaju likovi proreza C poredjani jedan pored drugoga po talasnim dužinama koji čine spektar (likovi će biti različito obojeni).



Sl. 16.18: Spektralni aparat

Posmatranje razložene svetlosti pomoću spektralnog aparata vrši se na sledeći način. Najpre se ukloni prizma, a zatim se durbin D koji ima končanicu na okularu, zakreće oko vertikalne ose, sve dok se lik proreza C, formiran kolimatorom i durbinom, ne poklopi sa centrom končanice. Tada optička osa durbina leži u pravcu snopa koji izlazi iz kolimatora. Pošto se uoči odgovarajući ugao, odnosno položaj durbina na postojećoj skali, prizma se postavi na postolje koje se takodje može okretati oko vertikalne ose. Sada se durbin okreće oko vertikalne ose sve dok prelomljeni zraci ne naidju u njegovo vidno polje. Prizma se okreće u jednom ili drugom smeru, a kroz durbin se stalno posmatra svetlost čija talasna dužina treba da se odredi. Tako se nadje položaj za koji je skretanje posmatrane linije minimalno. Zatim se sa tom linijom poklopi centar končanice i na skali pročita ugao, odnosno položaj durbina. Razlika izmedju ovog čitanja i predhodnog bez prizme daje ugao minimalnog skretanja za posmatranu svetlost.

Ako je spektralni aparat prilagodjen za vizuelno posmatranje spektra on se naziva *spektroskop*, koji se u principu ne razlikuje od spektrometra. Ako se ne traži velika preciznost u spektroskop se ugradjuje prizma sa malom disperzijom kako bi se istovremeno mogao posmatrati ceo spektar.

Pored spektroskopa koristi se i *spektrograf* koji je iste konstrukcije kao i spektrometar dat na slici 16.18. Razlika je samo u tome što se u ravni lika formiranog objektivom durbina postavi fotografska ploča umesto da se lik posmatra okularom durbina. Danas se skoro sva merenja nepoznatih talasnih dužina vrše tako što se na istoj ploči fotografiše pored nepoznatog spektra i linijski spektar nekog materijala čije su talasne dužine već poznate. Poznati spektar tada predstavlja skalu pomoću koje se mogu odrediti talasne dužine nepoznatog spektra.

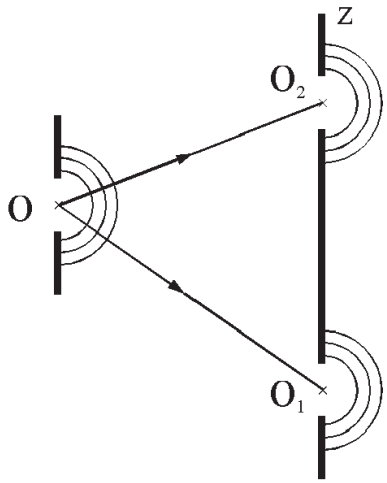
17. Talasna (fizička) optika

17.1 Interferencija svetlosti

17.1.1 Mogućnost dobijanja koherentne svetlosti. Interferenciona slika

Do sada je razmatrana samo interferencija mehaničkih talasa. Prirodno je pretpostaviti da je ova pojava svojstvena i svetlosnim (elektromagnetnim) talasima. Eksperimenti su pokazali da se i kod svetlosnih talasa mogu javiti efekti trajnije interferencije ako su ti talasi koherentni, tj. ako pri jednakim frekvencijama imaju konstantnu faznu razliku, približno iste intenzitete i odedjeni položaj polarizacionih ravni.

Pokazano je da se dva svetla tela nikada ne mogu koristiti kao koherentni izvori svetlosti. Svetlost koju emituje svetlosni izvor (na primer sijalica sa užarenim vlaknom) predstavlja skup elektromagnetnih talasa koje emituju pojedine čestice (atomi i molekuli) tela. Uslovi emitovanja tih čestica se brzo i neprekidno menjaju. Da bi svetlost bila koherentna, talasi koje emituju sve čestice jednog izvora treba da se razlikuju za konstantnu fazu od talasa koje emituju čestice drugog izvora u toku dužeg vremenskog intervala. Ovakva pojava je nemoguća, izuzev kod lasera. Zbog toga se za dobijanje koherentnih izvora svetlosti koriste odredjene metode. Jedna od tih metoda je "deljenje" svetlosti koja se emituje od jednog svetlosnog izvora (Jungova metoda). Ovo deljenje se može izvršiti, na primer, pomoću zaklona sa dva mala otvora (sl. 17.1). U saglasnosti sa Hajgensovim principom, od svetlosnog izvora O u otvorima zaklona z se formiraju sekundarni izvori svetlosti O_1 i O_2. U tom slučaju svaku promenu faze talasa koji emituje svetlosni izvor O, pratiće i talasi koje emituju sekundarni izvori O_1 i O_2. Prema tome, kod talasa koje emituju izvori O_1 i O_2 fazna razlika sve vreme ostaje konstantna.

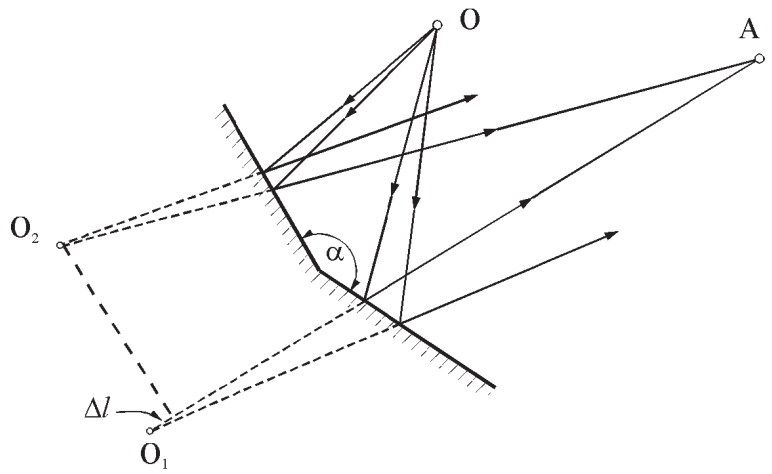


Sl. 17.1: Ilustracija dobijanja koherentnih svetlosnih talasa Jungovom metodom

Druga metoda za dobijanje koherentne svetlosti je Frenelova metoda i zasnovana je na odbijanju svetlosti od dva ravna ogledala koja su spojena pod uglom nešto manjim od 180^o (sl. 17.2). Ovakav optički sistem se naziva "Frenelova ogledala". Kao koherentni izvori svetlosti služe likovi O_1 i O_2 izvora O.

Rezultat interferencije u tački A zavisiće od putne razlike talasa iz izvora O_1 i O_2. Ako je putna razlika zraka $\Delta l = O_1A - O_2A$ jednaka celom broju talasnih dužina svetlosti, tj.

$$\Delta l = n\lambda; \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{17.1}$$



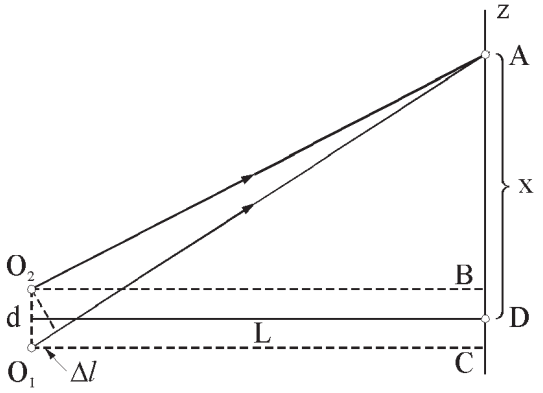
Sl. 17.2: Ilustracija dobijanja koherentnih svetlosnih talasa Frenelovom metodom

nastaće maksimalno pojačanje svetlosti ili interferencioni maksimum u tački A. Ako je putna razlika jednaka neparnom broju polovina talasnih dužina, tj.

$$\Delta l = (2n+1)\frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{17.2}$$

nastaće interferencioni minimum. Ako su amplitude talasa jednake nastaće potpuno poništavanje svetlosti. Za različite amplitude talasa, u tački A neće nastati potpuno gašenje, već slabljenje intenziteta svetlosti.

Neka se na zaklonu z formira interferenciona slika od dva koherentna svetlosna izvora monohromatske svetlosti O_1 i O_2. Rastojanje izmedju tih izvora je d, a normalno rastojanje od izvora do zaklona L, pri čemu je $d \ll L$ (sl. 17.3). Potrebno je odrediti rastojanje x izmedju tačaka D i A gde nastaju interferencioni maksimumi (minimumi).



Sl. 17.3: Uz objašnjenje interferencione slike

Iz trouglova ACO_1 i ABO_2 proizilazi da je

$$(AO_1)^2 = L^2 + (x + \frac{d}{2})^2 \tag{17.3}$$
$$(AO_2)^2 = L^2 + (x - \frac{d}{2})^2$$

ili

$$(AO_1)^2 - (AO_2)^2 = 2xd. \tag{17.4}$$

Izraz (17.4) može se napisati u obliku

$$(AO_1 - AO_2)(AO_1 + AO_2) = 2xd. \tag{17.5}$$

Pošto je

$$AO_1 - AO_2 = \Delta l; \quad AO_1 + AO_2 \approx 2L$$

to se zamenom u izraz (17.5) za rastojanje interferencionog maksimuma ili minimuma dobija

$$x = L\frac{\Delta l}{d}. \tag{17.6}$$

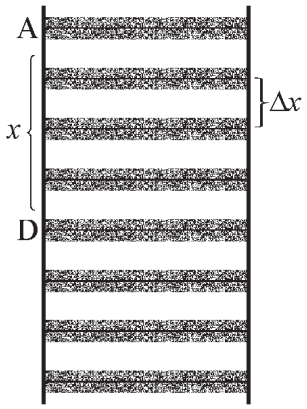
Korišćenjem izraza (17.1) i (17.2) dobija se izraz za nalaženje rastojanja izmedju interferencionih maksimuma svetlosti

$$x = n\frac{\lambda L}{d}, \tag{17.7}$$

i interferencionih minimuma

$$x = (2n+1)\frac{\lambda L}{2d} \tag{17.8}$$

od tačke D. Ako se interferenciona slika posmatra za mala rastojanja od tačke D, vidi se da se ona javlja u obliku paralelnih svetlih i tamnih traka (sl. 17.4). Centralni maksimum se pojavljuje za $n = 0$ i obuhvata tačku D. Rastojanje izmedju dva maksimuma (minimuma) dato je izrazom (17.7) za $n = 1$, tj.



Sl. 17.4: Interferenciona slika nastala od dva koherentna svetlosna izvora

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}. \tag{17.9}$$

Pošto je, saglasno izrazu (17.9), Δx obrnuto proporcionalno sa d, to će pri manjim rastojanjima izmedju O_1 i O_2 rastojanje izmedju interferencionih traka biti veće. Zbog toga je za dobijanje jasnije interferencione slike potrebno da svetlosni izvori budu na što manjem rastojanju jedan od drugog ($d \ll L$ na sl. 17.3).

Na osnovu izraza (17.9) može se eksperimentalno odrediti talasna dužina svetlosti merenjem d, L i Δx.

Ako se umesto monohromatske koristi polihromatska svetlost, saglasno izrazu (17.7), interferencioni maksimumi će se poredjati jedan pored drugog, po talasnim dužinama. Kao rezultat toga dobija se spektar te svetlosti.

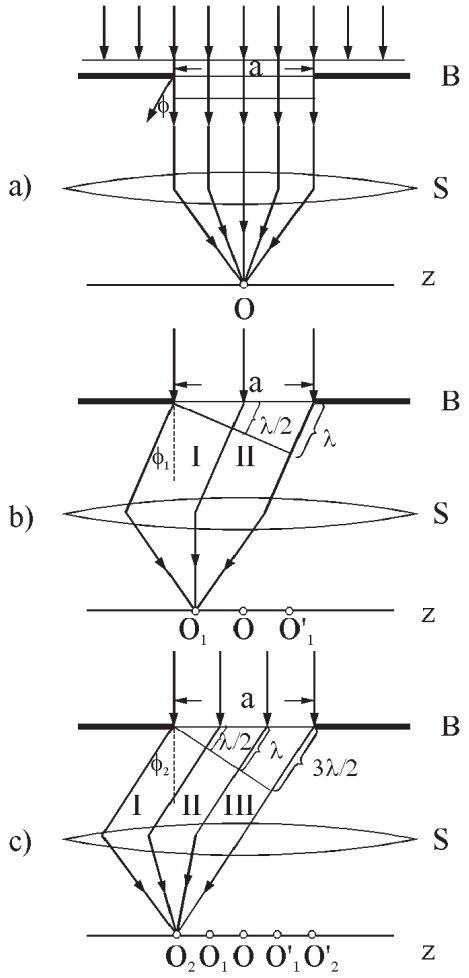
17.2 Difrakcija svetlosti

Difrakcija je pojava karakteristična kako za mehaničke, tako i za svetlosne talase.

U fizici se za demonstriranje difrakcije najčeće koriste uski prorezi (pukotine). Zato će detaljnije biti razmotrena difrakcija svetlosti na jednom i na dva paralelna proreza. Prorezi su najčešće pravouganog oblika čija je širina mnogo manja od dužine, a reda je veličine talasne dužine svetlosti.

17.2.1 Difrakcija svetlosti na jednom prorezu

Neka na zaklon B sa uskim pravougaonim prorezom širine a nailazi ravan talasni front monohromatske svetlosti (sl. 17.5). Više zraka iz snopa prolazi kroz prorez bez skretanja (sl. 16.a). Posle prelamanja



Sl. 17.5: Uz objašnjenje difrakcije na jednom prorezu

kroz sočivo S, zraci se sakupljaju u usku traku (prugu) na zaklonu z koji je normalan na ravan crteža i nalazi se u žižnoj ravni sočiva. Projekcija te trake na ravan crteža simbolički je predstavljena tačkom O. Ova traka sa stanovišta geometrijske optike predstavlja lik proreza. Kroz tačku O prolazi maksimalno osvetljena traka zbog toga što su zraci duž proreza koherentni, a putna razlika od proreza do tačke O jednaka je nuli.

Usled difrakcije jedan deo zraka u snopu, koji nailazi na prorez, skreće pod različitim uglovima u odnosu na prvobitni pravac (ugao ϕ se naziva ugao difrakcije). Neka snop zraka vrši skretanje od proreza za takav ugao $\phi = \phi_1$ da je putna razlika Δl medju krajnjim zracima snopa jednaka talasnoj dužini svetlosti, tj. $\Delta l = \lambda$ (sl. 17.5.b).

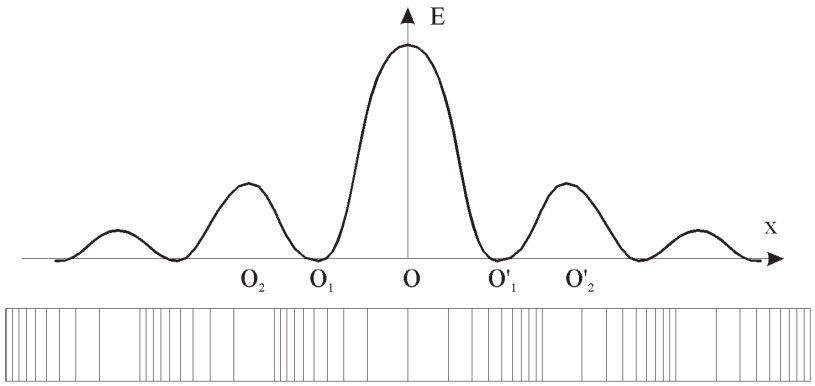
Snop svetlosti se može podeliti na dve zone (Frenelove zone), tako da je putna razlika zraka prve zone i odgovarajućeg zraka druge zone jednaka $\lambda/2$. Ovi zraci, prethodno sakupljeni sočivom u O_1, posle interferencije se poništavaju. Tako se na mestu O_1 javlja tamna traka (difrakcioni minimum). Difrakcioni minimum nastaje i na mestu O_1' koji se nalazi na istom rastojanju kao minimum O_1, ali sa druge strane maksimuma O (zraci koji obrazuju ovaj minimum na slici 17.5.b nisu prikazani). U difrakcionom snopu postoje i zraci koji skreću pod uglom $\phi = \phi_2$ čija je putna razlika $\Delta l = 3\lambda/2$ (sl. 17.5.c). Tada se ceo snop može podeliti na tri Frenelove zone I, II i III sa putnom razlikom od po $\lambda/2$. Dve susedne zone se medjusobno poništavaju i ostaje treća koja će dati difrakcioni maksimum na mestu O_2. Isti maksimum će se pojaviti na mestu O_2'. Osvetljenosti maksimuma O_2 i O_2' biće znatno manje od maksimuma O.

Analognim rasudjivanjem se može pokazati da se iza maksimuma O_2 i O_2' javljaju minimumi koji potiču od zraka iz snopa koji se posle difrakcije za neki ugao $\phi = \phi_3$ može podeliti u četiri Frenelove zone ($\Delta l = 4\lambda/2$) itd.

Uopšte može se reći da *snopovi zraka koji vrše difrakciju pod uglovima koji odgovaraju neparnom broju Frenelovih zona daju na zaklonu difrakcione maksimume, a snopovi zraka koji vrše difrakciju pod uglovima*

koji odgovaraju parnome broju Frenelovih zona daju difrakcione minimume. Osvetljenost maksimuma se smanjuje sa povećanjem ugla difrakcije koji daje te maksimume.

Na taj način, difrakciona slika dobijena od jednog uskog proreza predstavlja niz naizmeničnih tamnih i svetlih traka simetrično rasporedjenih sa obe strane centralnog maksimuma O. Takva difrakciona slika predstavljena je na slici 17.6. Na istoj slici dat je grafik raspodele osvetljenosti maksimuma nastalih pri difrakciji, gde je x rastojanje od centra slike.



Sl. 17.6: Kriva raspodele osvetljenosti i rastojanja izmedju maksimuma i minimuma pri difrakciji na jednom prorezu

Kao što se vidi, difrakcioni maksimumi se dobijaju pri putnoj razlici $\Delta l = (2n+1)\lambda/2$, a difrakcioni minimumi pri putnoj razlici $\Delta l = n\lambda$.

Sa slike 17.5 se vidi da je $\Delta l = a \sin\phi$, gde je a širina proreza. Tada se difrakcioni maksimum može napisati u sledećem obliku:

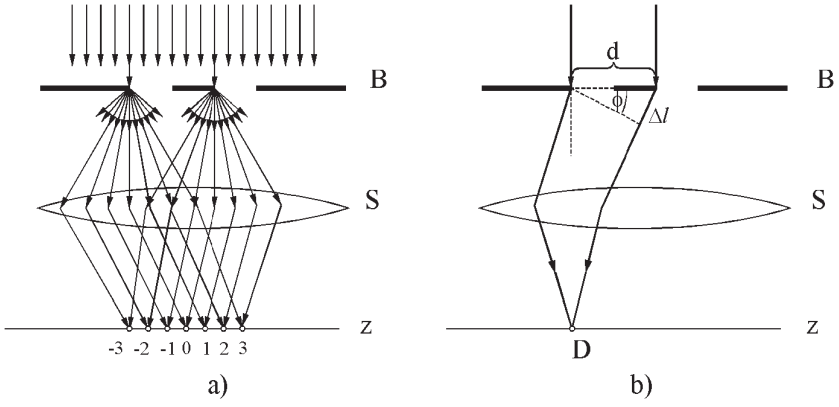
$$\sin\phi = (2n+1)\frac{\lambda}{2a}, \tag{17.10}$$

a difrakcioni minimum

$$\sin\phi = \frac{n\lambda}{a}. \tag{17.11}$$

17.2.2 Difrakcija svetlosti na više proreza

Neka snop svetlosnih zraka monohromatske svetlosti pada normalno na zaklon B sa dva uska paralelna proreza čije je medjusobno rastojanje d (sl. 17.7). Tada ovi prorezi predstavljaju koherentne izvore svetlosti.



Sl. 17.7: Uz objašnjenje difrakcije na dva proreza

Ako se iza zaklona B sa prorezima nalazi sabirno sočivo S, onda se na zaklonu Z, koji se nalazi u žižnoj ravni sočiva, javlja difrakciona slika kao rezultat dva procesa: difrakcije svetlosti na svakom pojedinačnom prorezu i interferencije svetlosti iz oba proreza.

Posmatraće se zraci koji padaju, na primer, na levu ivicu oba proreza. Usled difrakcije svetlost će posle prolaska kroz prorez skretati u svim pravcima (sl. 17.7.a). Ovde će biti razmotreno skretanje zraka pod uglom ϕ, (sl. 17.7.b) pri čemu je njihova putna razlika

$$\Delta l = d \sin \phi. \tag{17.12}$$

Pri putnoj razlici jednakoj celom broju talasnih dužina, tj.

$$d \sin \phi = n\lambda, \tag{17.13}$$

na zaklonu će se pojaviti interferencioni maksimum. Pri putnoj razlici jednakoj neparnom broju polovina talasnih dužina, tj.

$$d \sin \phi = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{17.14}$$

na zaklonu će se pojaviti interferencioni minimum.

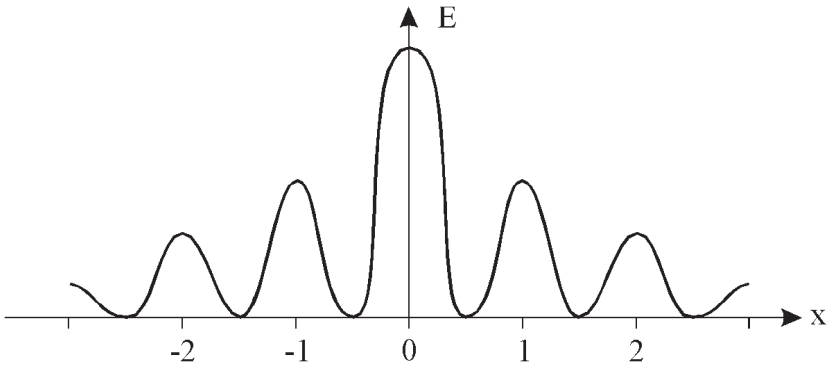
Broj maksimuma je ograničen i ne može biti veći od λ/d. To se vidi iz izraza (17.13), koji se može napisati u obliku

$$\sin \phi = n : (d/\lambda). \tag{17.15}$$

Pošto je $\sin \phi \leq 1$, sledi da je

$$n \leq \frac{d}{\lambda}. \tag{17.16}$$

Osvetljenost maksimuma je nejednaka. Najveću osvetljenost ima centralni maksimum ($n = 0$), prvi sledeći maksimumi ($n \pm 1$) su slabije osvetljeni, sledeći još slabije itd. Na slici 17.8 dat je grafik raspodele osvetljenosti maksimuma (difrakcione trake), dobijene difrakcijom na dva otvora.



Sl. 17.8: Kriva raspodele osvetljenosti pri difrakciji na dva otvora

Račun (koji ovde neće biti sproveden) pokazuje da se pri difrakciji svetlosti na više paralelno poredjanih uskih proreza na malom medjusobnom rastojanju dobija difrakciona slika sličnog oblika. U tom slučaju maksimumi su oštriji i uži od onih obrazovanih od dva proreza. Rastojanje medju susednim maksimumima i njihova oštrina raste sa uvećanjem broja proreza. Položaj ovih maksimuma se takodje odredjuje iz izraza (17.13).

Niz paralelnih uskih proreza, razdvojenih jednakim neprovidnim površinama, predstavljaju *difrakcionu rešetku*. Rastojanje d izmedju dva proreza (sl. 17.7.b) naziva se *konstanta* ili *korak rešetke*. Difrakciona rešetka se izradjuje tako što se na staklenoj ploči zapara dijamantnom iglom veliki broj paralelnih zareza (transmisiona optička rešetka). Kao difrakciona optička rešetka može se koristiti polirana metalna površina na kojoj se takodje dijamantnom iglom načini veliki broj zareza (refleksiona optička rešetka). Kvalitetnije optičke rešetke imaju 1200 do 1500 zareza po jednom milimetru dužine, što odgovara konstanti rešetke od $0,83$ do $0,56\,\mu m$.

Kada na difrakcionu rešetku pada monohromatska svetlost, cela slika koju daje difrakciona rešetka u žižnoj ravni sočiva ima oblik veoma uskih svetlih traka, razdvojenih tamnim medjuprostorima. Pri osvetljavanju rešetke polihromatskom svetlošću, u centru (O) se javlja bela traka, pošto je za $\phi = 0$ uslov (17.13) zadovoljen za svako λ. Levo i desno od centralne boje trake pojaviće se maksimum za različite talasne dužine pod uglovima, čija je vrednost odredjena izrazom (17.13) za $n = 1$. Ti maksimumi obrazuju obojene trake koje se spajaju. One predstavljaju spektar polihromatske svetlosti. Maksimumi za ljubičaste zrake biće najbliži centralnoj traci, a maksimumi za crvene zrake - najdalje od nje. Usled toga će se za $n = 1$ pojaviti dva spektra (levi i desni) prvoga reda, okrenuti ljubičastim krajevima ka centralnoj traci. Analogno, za $n = 2, 3...$ pojaviće se spektri drugog, trećeg, itd. reda rasporedjeni simetrično u odnosu na centralnu belu traku.

Pri osvetljavanju rešetke svetlošću koja sadrži talase samo odredjenih talasnih dužina dobiće se linijski spektri raznih redova. Centralna traka u tom slučaju pojaviće se kao rezultat superpozicije zraka svih talasnih dužina date svetlost.

17.3 Polarizacija svetlosti

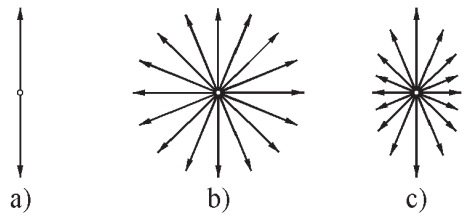
17.3.1 Nepolarizovana (prirodna) i polarizovana svetlost

Interferencija i difrakcija svetlosti su pojave koje su ukazale na talasnu prirodu svetlosti. Medutim, one nisu dale odgovor na pitanje da li su svetlosni talasi transverzalni ili longitudinalni. Pojava polarizacije pokazuje da je svetlost transverzalni elektromagnetni talas.

Eksperimentalno je ustanovljeno da svetlost koju emituju atomi predstavlja transverzalne talase sa uzajamno normalnim vektorima električnog $\vec{E}$ i magnetnog polja $\vec{H}$, koji su normalni na pravac prostiranja svetlosti. Stoga je za potpuno opisivanje stanja polarizacije svetlosnog snopa dovoljno poznavati položaj samo jednog od vektora. Često se ova razmatranja vrše u odnosu na vektor jačine električnog polja $\vec{E}$, zbog toga što pri dodiru svetlosti sa materijalima osnovnu ulogu ima električno polje talasa, koje dejstvuje na atome datog materijala. Usvojeno je da se vektor $\vec{E}$ naziva *svetlosni vektor* i koristi se za opis pojava u optici. Ravan u kojoj osciluje vektor $\vec{E}$ naziva se *ravan oscilovanja svetlosnog talasa*, a to je istovremeno i *polarizaciona ravan* svetlosnih talasa.

Svetlosni talas koji emituje jedan atom kao svetlosni izvor u jednom aktu emisije ima takvu osobinu da mu vektor $\vec{E}$ osciluje u strogo odredjenoj ravni, a vektor $\vec{H}$ u ravni koja je normalna na ravan oscilovanja vektora $\vec{E}$. Takav talas se naziva *linearno polarizovan*. U ovom slučaju električni vektor se menja po intenzitetu samo u jednom pravcu, tj. u polarizacionoj ravni.

Linearno polarizovana svetlost se šematski predstavlja na način prikazan na slici 17.9.a. Pravac zraka je normalan na ravan slike dok strelice predstavljaju amplitude oscilovanja vektora $\vec{E}$.



Sl. 17.9: Linearno polarizovana (a), nepolarizovana (b) i delimično polarizovana svetlost (c)

U prirodi se veoma retko sreće svetlost koja potiče samo od jednog atoma. Svaki realni svetlosni izvor se sastoji iz velikog broja atoma koji emituju mnoštvo linearno polarizovanih talasa čije su ravni oscilovanja orijentisane podjednako u svim pravcima (sl. 17.9.b). Za takvu svetlost se kaže da je *nepolarizovana* ili *prirodna*. Postoje i takvi slučajevi kod kojih su amplitude vektora $\vec{E}$ svetlosnih talasa različite u različitim ravnima oscilovanja. Takva svetlost naziva se *delimično polarizovana* (sl. 17.9.c).

Nekada je moguće dobiti takvu polarizovanu svetlost čiji vektor $\vec{E}$ rotira oko zraka u ravni koja je normalna na njega. Vektor $\vec{E}$ periodično menja svoj intenzitet tako da njegov vrh opisuje elipsu. Ovakav

slučaj se dobija kada se dve medjusobno upravne oscilacije sa istim frekvencijama a različitim amplitudama slažu u jednu rezultujuću oscilaciju. Takva svetlost se naziva *eliptično polarizovana svetlost*. U specijalnom slučaju, kad obe oscilacije imaju iste amplitude, odnosno, kad svetlosni vektor samo rotira a ne menja intenzitet, njegov kraj će opisivati krug. Takva svetlost se naziva *kružno* ili *cirkularno polarizovana svetlost*. Treba napomenuti da je matematička interpretacija za eliptično i kružno polarizovanu svetlost analogna onoj za slaganje mehaničnih oscilacija sa medjusobno upravnim pravcima, datoj u odeljku 1.1.

17.3.2 Dobijanje polarizovane svetlosti

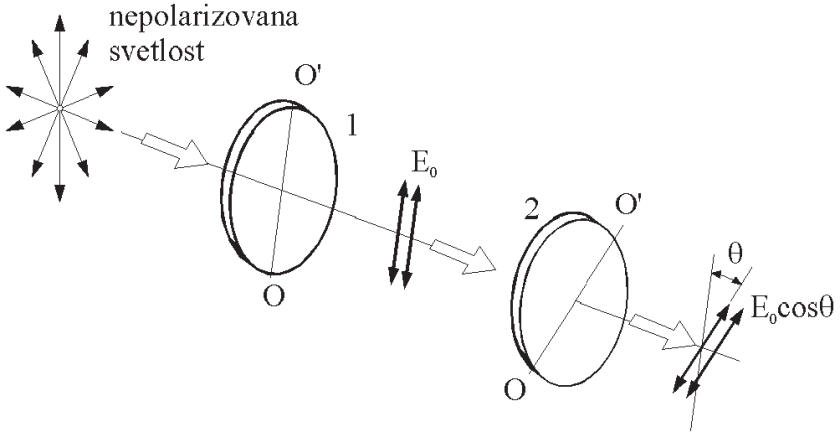
Da bi se prirodna svetlost mogla polarizovati potrebno je obezbediti takve uslove pod kojima je oscilovanje svetlosnog vektora $\vec{E}$ moguće samo u jednoj ravni. Ovakvi uslovi se mogu ostvariti ako svetlost prolazi kroz sredine koje su anizotropne u odnosu na električne oscilacije. Takvu osobinu imaju pojedini kristali. Eksperimenti su pokazali da mnogi kristali, kako prirodni tako i veštački, mogu vršiti polarizaciju pri prolazu prirodene svetlosti kroz njih.

Fizička suština procesa polarizacije svetlosti je sledeća. Prema Maksvelovoj elektromagnetnoj teoriji, promena električnog polja svetlosnih talasa izaziva u kristalnim dielektricima pojavu *polarizacione struje* koja nastaje usled pomeranja čestica (elektrona, atoma, jona itd.) u kristalnoj rešetki. Polarizaciona struja dovodi do oslobadjanja Džulove (Joule) toplote, tj. nastaje pretvaranje svetlosne energije u toplotnu. Na taj način se svetlost apsorbuje.

Zahvaljujući anizotropiji kristala mogućnost pomeranja njegovih čestica, a samim tim i jačine polarizacione struje, je različita u različitim ravnima kristalne rešetke. Zbog ove pojave intenzitet apsorpcije svetlosti zavisi od polažaja polarizacione ravni prema kristalografskim osama.

Prema tome, od električnih oscilacija prirodene svetlosti koje imaju veliki broj ravni oscilacija, kroz kristal će proći (bez apsorpcije) samo one koje se vrše u ravni kojoj odgovara minimalna polarizaciona struja. Ostale oscilacije će biti u manjoj ili većoj meri oslabljene. Kao rezultat toga kroz kristal će prolaziti svetlost čije se električne oscilacije vrše samo u odredjenoj ravni, tj. svetlost postaje polarizovana, a njen intenzitet se smanjuje u odnosu na intenzitet prirodne svetlosti.

U prirodne kristale koji polarizuju svetlost spada turmalin. Zrak prirodne svetlosti, prošavši kroz ploču od turmalina 1 koja je sečena po odredjenoj ravni u odnosu na kristalografsku osu OO', potpuno se polarizuje, sa oscilacijama električnog polja u ravni u kojoj leže optička osa OO' i zrak (sl. 17.10).



Sl. 17.10: Prolaz svetlosti kroz dve pločice od turmalina

Ako se iza ploče postavi druga ploča turmalina (2) čija kristalografska osa zaklapa ugao $\theta < 90^o$ sa osom prvog kristala, svetlost će delimično prolaziti kroz ploču. Amplituda svetlosnog vektora $\vec{E}$ koji prolazi kroz ploču 2 biće manja od amplitude E_o svetlosnog vektora koji pada na tu ploču za vrednost $E_o \cos\theta$. Intenzitet svetlosti koji prodje kroz ploču 2 može se izraziti na sledeći način:

$$I = I_o \cos^2 \alpha, \tag{17.17}$$

gde je I_o intenzitet svetlosti koja pada na ploču 2, a I intenzitet svetlosti koja prodje kroz tu ploču. Izraz (17.17) predstavlja matematičku interpretaciju Malusovog zakona.

Prema tome, okretanjem ploče 2 oko polarizovanog zraka može se pratiti promena intenziteta svetlosti koja prolazi kroz takvu ploču. Maksimalni intenzitet se javlja pri $\theta = 0^o$, a minimalni (potpuno gašenje) pri $\theta = 90^o$.

Ploča 1, koja vrši polarizaciju nepolarizovane svetlosti naziva se *polarizator*. Ploča 2, pomoću koje se vrši promena intenziteta polarizovane svetlosti (a samim tim prati efekat polarizacije) naziva se *analizator*. Ove ploče su jednake i zamenom njihovih mesta dobija se isti efekat polarizacije.

Turmalin selektivno apsorbuje, tj. propušta prvenstveno zelenu svetlost, što predstavlja nedostatak turmalina kao polarizatora i analizatora.

Poslednjih godina za polarizaciju svetlosti koriste se *polaroidi* (polarizacioni filtri). Polaroid predstavlja providnu ploču debljine oko $0,1\,mm$ koja sadrži mnoštvo malih elementarnih kristala, na primer, kristala herapatita (kinin jodosulfata). Optičke ose svih ovih kristala se orijentišu u jednom pravcu u procesu izrade polaroida. Prednost polaroida u odnosu na turmalin i slične kristale je u tome što je znatno jeftiniji, veoma je elastičan, a kristali pomešani sa želatinom imaju veliku površinu, a iz propuštene komponente neznatno apsorbuju zrake skoro svih talasnih dužina vidljive svetlosti.

18. Ranije predstave o atomu

18.1 Tomsonov i Raderfordov model atoma

Hipoteza o atomskoj strukturi materije potiče iz stare Grčke i Rima. U to vreme su Leukip i Demokrit u Grčkoj i Epikur i Lukrecije u Rimu smatrali da se materija sastoji od velikog broja atoma, tj. nedeljivih čestica. Nasuprot tome postojalo je i drugo shvatanje koje je zastupao Aristotel. Aristotel i njegovi sledbenici nisu prihvatili učenje o atomskoj strukturi materije, što se negativno odrazilo na dalji razvoj atomske teorije. Ovakvo shvatanje se održalo sve do 16 veka, kada ponovo počinje da preovladjuje učenje o atomskoj strukturi.

Veliki doprinos razvoju shvatanja o atomskoj strukturi materije pripada Daltonu, koji je osnivač naučne atomističke teorije. Važnu ulogu u razvoju atomističke teorije odigrao je Mendeljejev koji je razradio periodni sistem elemenata. Periodična zakonitost na koju je on ukazao pokazuje da je atom složena čestica što se dotadašnjim hemijskim metodama nije moglo ustanoviti.

Pred kraj 19 veka eksperimentalni rezultati do kojih se došlo takodje su ukazivali na složenu strukturu atoma. Sem toga, kinetička teorija gasova povezala je koeficijente prenosa (koeficijent difuzije, toplotnu provodnost, unutrašnje trenje) sa srednjom dužinom slobodnog puta i prečnikom atoma (molekula). Iz dobijenih rezultata je nadjeno da je prečnik atoma reda $10^{-10}\,m$.

Proučavanjem pojava kao što su pražnjenje u gasovima, elektroliza u tečnostima, otkriće katodnih i kanalskih zraka došlo se do saznanja da se neutralni atom sastoji od negativnih (elektrona) i pozitivnih delova. Takodje je nadjeno da je masa elektrona nekoliko hiljada puta manja od mase atoma i da atom kao celina predstavlja izvor svetlosti i toplotnog zračenja.

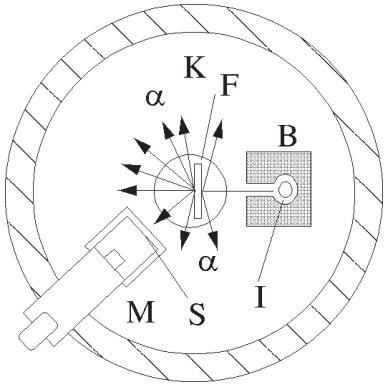
Na osnovu do tada eksperimentalno dobijenih rezultata prvi model atoma predložio je Dž. Tomson (J. Thomson). Taj model je nazvan Tomsonov ili statički model. Prema ovom modelu atom predstavlja sferu prečnika reda $10^{-10}\,m$ koja je pozitivno naelektrisana. U tu sferu su utisnuta izolovana negativna naelektrisanja - elektroni koji osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Ukupno negativno naelektrisanje jednako je pozitivnom naelektrisanju sfere.

Iako se ispostavilo da Tomsonov model ne može da opiše stvarno ponašanje atoma on je odigrao pozitivnu ulogu u nauci. Pomoću njega je objašnjena pojava emitovanja elektromagnetnog zračenja iz atoma kao oscilatora, intezivirano je proučavanje linearnog harmonijskog oscilatora sa gledišta kvantne fizike. Pomoću ovog modela proučena je priroda dielektrične konstante, a takodje je predvidjeno postojanje izotopa. Ovim modelom je bilo moguće proučiti i atome sa više elektrona.

Znatno veću ulogu u objašnjenju strukture atoma odigrali su eksperimenti Raderforda (Rutherford) i saradnika. U to vreme je već bila otkrivena radioaktivnost, pa su oni posmatrali rasejavanje alfa-čestica pri prolasku kroz folije od različitih materijala. Zapazili su da pri prolasku kroz ove folije većina alfa-čestica skreće za veoma male uglove (2^o do 3^o). Medjutim jedan manji broj alfa-čestica skreće pod znatno većim uglovima.

Šema uredjaja kojim su Raderford i njegovi saradnici posmatrali rasejavanje alfa-čestica prikazana je na slici 18.1. Metalna folija F (od zlata, platine, bakra ili srebra) debljine $1\,\mu m$ nalazi se u unutrašnjosti komore K iz koje je evakuisan vazduh. U komori se nalazi kontejner B sa radioaktivnim izvorom I. Uski snop alfa-čestica (na slici obeležen sa α) pada na metalnu foliju F čiji atomi vrše njihovo rasejavanje. Posle prolaska kroz ovu foliju alfa-čestice skreću u različitim pravcima. Deo njih pada na zaklon S od fluorescentnog materijala (na primer zaklon prekriven cink- sulfidom). Pri udaru alfa-čestica u takav materijal nastaju scintilacije (svetlucanja). Zahvaljujući tim scintilacijama mogu se pratiti rasejavanja alfa-čestica. Scintilacije su posmatrane pomoću mikroskopa M koji se zajedno sa fluorescentnim zaklonom mogao okretati oko ose koja prolazi kroz centar ovog uredjaja. Na taj način je bilo moguće registrovati

alfa-čestice koje su rasejane pod različitim uglovima, tj. broj alfa-čestica u funkciji ugla skretanja.



Sl. 18.1: Šema uredjaja za posmatranje rasejavanja alfa-čestica

Ako na površinu ΔS folije F u jedinici vremena pada N alfa-čestica, njihov broj ΔN rasejan u intervalu od θ do $\theta + d\theta$ (θ je ugao pod kojim se rasejavaju alfa-čestice) je dat sledećim izrazom:

$$\Delta N = nNx(\frac{Ze^2}{m_\alpha v_\alpha^2})^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \tag{18.1}$$

gde je n broj atoma folije u jedinici zapremine, x debljina folije, m_α masa alfa-čestice, v_α njena brzina, $\Delta\Omega$ prostorni ugao, Z atomski broj elemenata materijala folije i e elementarno naelektrisanje. Ako je površina fluorescentnog zaklona $S = 1\,cm^2$ i nalazi se na rastojanju R od folije F, tada je

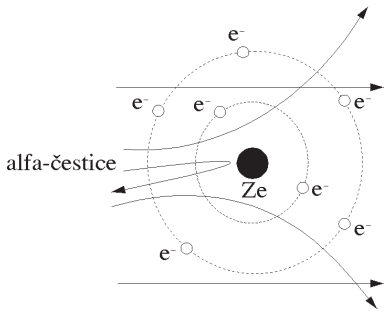
$$R^2\Delta\Omega = 1. \tag{18.2}$$

U tom slučaju se izraz (18.1) može napisati u sledećem obliku:

$$\Delta N = \frac{nNx}{R^2}(\frac{Ze^2}{m_\alpha v_\alpha^2})^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \tag{18.3}$$

i naziva se Raderfordova formula za rasejavanje alfa-čestica na atomima. Eksperimenti sa rasejavanjem alfa-čestica su u potpunosti potvrdili Raderfordovu formulu.

Tražeći objašnjenje za napred opisani eksperiment, tj. za rasejavanje alfa-čestica pod većim uglovima, Raderford je pošao od pretpostavke da je takvo skretanje uslovljeno interakcijom izmedju alfa-čestica, koje su pozitivno naelektrisane (projektila) i pozitivnih delova atoma. Skretanje pod malim uglovima je posledica prolaska alfa-čestica pored tog pozitivnog naelektrisanja kao što je prikazano na slici 18.2. Iz ovih eksperimenata je zakjučeno da su celokupno pozitivno naelektrisanje atoma i gotovo sva njegova masa skoncentrisani u veoma maloj zapremini čiji je prečnik reda $10^{-14} - 10^{-13}\,m$ koja se naziva atomsko jezgro, jer se veoma mali broj alfa-čestica rasejava za ugao od 180^o. Pri tome je bitno da se uticaj elektrona koji se kreću oko jezgra u atomu može zanemariti.



Sl. 18.2: Interakcija alfa-čestica sa jezgrom atoma

Na osnovu teorijskih i eksperimentalnih razmartanja Raderford je predložio model atoma koji se naziva planetarni (nuklearni) model atoma. Prema ovom modelu, oko pozitivno naelektrisanog jezgra, čije je naelektrisanje Ze, kruže elektroni. Kada je atom neutralan onda je naelektrisanje jezgra jednako

zbiru naelektrisanja elektrona koji ulaze u sastav atoma. Raderford je pretpostavio da se elektroni kreću oko jezgra po kružnim orbitama poluprečnika r. U tom slučaju Kulonova (Coulomb) sila jednaka je centrifugalnoj sili, tj.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{mv^2}{r}, \tag{18.4}$$

gde v brzina elektrona na orbiti poluprečnika r, $\epsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12}\, Fm^{-1}$ dielektrična konstanta vakuuma.

U jednačini (18.4) poluprečnik orbite i brzina kojom se elektron kreće po orbiti mogu imati proizvoljne vrednosti, tj. njihove vrednosti mogu se neprekidno (kontinualno) menjati. Energija sistema E_{max} je najveća kada se elektron nalazi na najudaljenijoj orbiti od jezgra. Pri prelazu elektrona sa jedne na drugu orbitu može se emitovati ili apsorbovati bilo koja vrednost energije kaja je manja ili jednaka E_{max}. Drugim rečima, energetski spektar atoma, po ovom modelu, je kontinualan.

Iz jednačine (18.4) proizilazi da je za poluprečnik orbite $r \approx 10^{-10}\, m$ brzina kretanja elektrona $v \approx 10^6\, ms^{-1}$, a ubrzanje $v^2/r \approx 10^{22}\, ms^{-2}$. Po zakonima elektrodinamike usled ubrzanog kretanja elektrona dolazi do emisije elektromagnetnog zračenja usled čega on neprekidno gubi energiju. Zbog toga bi se elektron sve više približavao jezgru i na kraju bi pao na njega. Takav atom bi bio nestabilan, što ne odgovara stvarnosti, jer se on ponaša kao stabilna čestica.

Pokušaj da se model formuliše u okviru klasične fizike nije dao željene rezultate. Naime, Tomsonov model atoma je zamenjen Raderfordovim modelom, a ovaj se pokazao elektrodinamički nestabilnim i njime nisu mogli da se objasne odredjeni eksperimentalni rezultati. To znači da se na osnovu zakona klasične fizike nisu mogle da objasne odredjene pojave u mikrosvetu pa je ovaj model atoma doživeo sličnu sudbinu kao i Tomsonov model. Naime, zamenjen je novim - Borovim (Bohr) modelom koji je zasnovan na kvantitativno novoj teoriji koja je nazvana kvantna teorija atoma.

18.2 Spektar atoma vodonika

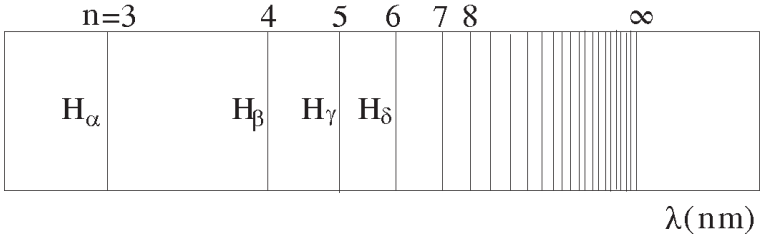
Istraživanjem atomskih spektara u razredjenim gasovima (emisionih spektara atoma) pokazano je da svaki gas ima svoj karakterističan linijski spektar koji se sastoji od velikog broja linija ili grupe linija. Na slici 18.3 dat je jedan broj linija spektra atoma vodonika.

Balmer (Balmer) je prvi ustanovio da se talasne dužine linija spektra atoma vodonika mogu izraziti pomoću empirijskog izraza

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.5}$$

gde je $n = 3, 4, 5, ...$, $\tilde{\nu}$ predstavlja broj talasa po jedinici dužine i $R_H = 10970900\, m^{-1}$ Ridbergova (Rydberg) konstanta i $c = 3 \cdot 10^8\, ms^{-1}$.

Iz izraza (18.5) se vidi da različitim spektralnim linijama odgovaraju različite vrednosti za n. Te linije obrazuju grupu ili seriju koja se naziva Balmerova serija. Sa povećanjem vrednosti n spektralne linije se sve više približavaju jedna drugoj kako je to prikazano na slici 18.3. Granica serije se dobija za $n \to \infty$.



Sl. 18.3: Spektar atoma vodonika

Izraz (18.5) se često izražava preko frekvencije ν, tj.

$$\nu = R'_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.6}$$

gde je $n = 3, 4, 5,...$, $R'_H = R_H c = 3,28985.10^{15}\ s^{-1}$ i takodje se naziva Ridbergova konstanta.

Istraživanjem spektra vodonika pokazalo se da postoje i druge serije spektralnih linija. U ultraljubičastoj oblasti spektra nadjena je Lajmanova (Lyman) serija

$$\nu = R'_H(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.7}$$

gde je $n = 2, 3, 4, ...$

U infracrvenoj oblasti nadjene su sledeće serije:
Pašenova (Paschen)

$$\nu = R'_H(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.8}$$

gde je $n = 4, 5, 6, ...$
Breketova (Brecket)

$$\nu = R'_H(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.9}$$

gde je $n = 5, 6, 7, ...$
Pfundova (Pfund)

$$\nu = R'_H(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.10}$$

gde je $n = 6, 7, 8,...$
Hemfrijeva (Hemfri)

$$\nu = R'_H(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.11}$$

gde je $n = 7, 8, 9,...$

Sve serije spektra vodonika mogu se izraziti na sledeći način:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \tag{18.12}$$

ili

$$\frac{c}{\lambda} = \nu = R'_H(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}), \tag{18.13}$$

gde su m i n celi brojevi. Za datu seriju je $n = m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ itd. Za Lajmanovu seriju je $m = 1$, za Balmerovu $m = 2$, za Pašenovu $m = 3$ itd.

Ridberg je pokazao da se $\tilde{\nu}$ za sve linije date serije može izraziti na sledeći način:

$$\tilde{\nu} = T(m) - T(n), \tag{18.14}$$

gde su n i m celi brojevi. Funkcije $T(n)$ i $T(m)$ se nazivaju spektralni termovi. Za datu seriju m ima konstantnu vrednost. Promenom vrednosti n dobijaju se sve linije date serije. Na primer, za Balmerovu seriju iz (18.14) sledi da je $T(m) = R_H/2^2$, a $T(n) = R_H/n^2$. Kada $n \to \infty$ tada $T(n) \to 0$ što predstavlja kraj Balmerove serije.

Ric (Ritz) je formulisao princip koji je nazvan Ricov kombinacioni princip i glasi: *frekvencija bilo koje spektralne linije, koju emituje atom, može se predstaviti u obliku razlike dva terma. Kombinacijom različitih termova mogu se naći frekvencije svih mogućih spektralnih linija datog atoma.* Linijski karakter emisionih i apsorbcionih spektara atoma pokazuje da atom ne može emitovati (apsorbovati) bilo koju već tačno odredjenu vrednost energije koja se naziva kvant. Dakle, atom se može naći samo u odredjenim (diskretnim) stanjima. Prelazom iz jednog u drugo stanje on emituje (ili apsorbuje) kvant jednak razlici energija početnog i konačnog stanja.

18.3 Borovi postulati

Prvi pokušaj postavljanja nove (kvantne) teorije atoma izvršio je Bor. On je pokušao da poveže empirijske zakonitosti linijskog spektra, Raderfordov model atoma i kvantni karakter emisije i apsorbcije svetlosti.

U osnovi svoje teorije Bor je postavio tri postulata. Prvi postulat (postulat stacionarnih orbita) glasi: *elektron u atomu se ne može kretati po bilo kojoj orbiti već po orbitama tačno odredjenog poluprečnika. Na tim orbitama, koje se nazivaju stacionarne ili diskretne, moment impulsa elektrona zadovoljava uslov*:

$$L = mv_n r_n = n\hbar, \tag{18.15}$$

gde je m masa elektrona, v_n njegova brzina na n-toj orbiti poluprečnika r_n, n je ceo broj ($n = 1, 2, 3,...$) koji se naziva glavni kvantni broj i $\hbar = h/(2\pi)$ gde je $h = 6,64.10^{-34}\ Js$ Plankova (Planck) konstanta.

Izraz (18.15), pored kvantovanja momenta impulsa izražava i uslov kvantovanja poluprečnika orbite elektrona. To znači da se elektron može kretati samo po orbitama za koje je moment impulsa jednak celobrojnom umnošku $\hbar$. Posledica toga je da na odredjenoj stacionarnoj orbiti elektron ima strogo odredjenu (kvantovanu) energiju koja se ne menja sve dok se nalazi na njoj.

Drugi postulat glasu: *Pri kretanju elektrona po stacionarnim orbitama ne emituje se niti apsorbuje energija.*

Treći postulat (pravilo frekvencije) glasi: *prelaz elektrona sa jedne na drugu orbitu uslovljen je emisijom ili apsorbcijom kvanta energije.* Dakle, pri prelazu elektrona sa jedne stacionarne orbite na drugu atom emituje ili apsorbuje kvant energije jednak razlici energija tih stacionarnih stanja, tj.

$$h\nu = E_2 - E_1 = \Delta E, \tag{18.16}$$

gde su E_2 i E_1 energije stacionarnih stanja atoma pre i posle emisije. Ako atom apsorbuje kvant energije $h\nu$ elektron prelazi sa orbite bliže jezgru (energije E_1) na orbitu koja je dalja od njega (energije E_2), a obrnuto nastaje emisija.

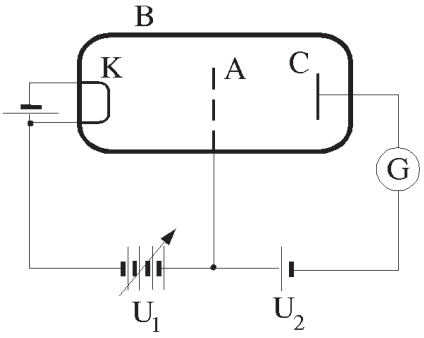
Iz izraza (18.16) se može zapaziti da frekvenciju elektromagnetnog zračenja, koju emituje atom, ne odredjuje frekvencija kruženja elektrona u atomu već razlika energija stacionarnih stanja atoma.

Borovi postulati se mogu izraziti u nešto opštijem obliku na sledeći način: *atom je stabilan samo u stanjima kojima odgovaraju diskretne vrednosti energije ($E_1, E_2, E_3,...$). Prelaz atoma iz jednog stacionarnog stanja u drugo praćeno je emisijom ili apsorpcijom kvanta energije $h\nu$.*

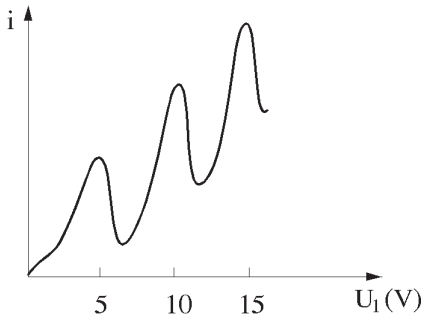
18.4 Frank - Hercov ogled

Pretpostavka o diskretnim energetskim stanjima atoma, na osnovu koje je Bor formulisao svoje postulate, dokazana je Frank-Hercovim (Franck - Hertz) ogledom. Šema ogleda prikazana je na slici 18.4. Elektronska cev B je prethodno evakuisana i napunjena živom na pritisku reda $10^2\ Pa$. Izmedju katode K i anode A, koja je u obliku rešetke, priključen je napon U_1 čija se vrednost može menjati. Anoda je za oko $U_2 \approx 0,5\,V$ na većem potencijalu od kolektora C. Elektroni koji se oslobadjaju iz katode usled termoelektronske emisije ubrzavaju se u prostoru izmedju katode i anode pod dejstvom električnog polja koje potiče od priključenog napona U_1. Ako je kinetička energija elektrona u momentu nailaska na anodu veća od $0,5\,eV$ oni će savladati kočeći napon U_2 i stići do kolektora C pri čemu će galvanometar G registrovati struju i.

Grafik zavisnosti struje kolektora od napona izmedju katode i anode prikazan je na slici 18.5. Sa povećanjem napona U_1 struja u početku raste da bi pri $U_1 \approx 4.9\,V$ naglo opala. Sa daljim povećanjem napona U_1 struja ponovo počinje da raste i pri $U_1 \approx 2 \cdot 4,9\,V$ takodje naglo opadne. Sledeći pad struje je pri $U_1 \approx 3 \cdot 4,9\,V$ itd. Prema tome, rastojanje izmedju susednih maksimuma na grafiku odgovara promeni napona U_1 za približno $4,9\,V$. Poznato je da potencijalna razlika od $1\,V$ saopštava elektronu kinetičku energiju od $1\,eV$. To znači da u polju koje stvara napon $U_1 \approx 4,9\,V$ elektron dobija kinetičku energiju od $4,9\,eV$ ($1\,eV = 1,6 \cdot 10^{-19}\ J$).



Sl. 18.4: Šema uredjaja u Frank-Hercovom ogledu



Sl. 18.5: Strujno-naponska karakteristika

Ovakav tok grafika može se objasniti činjenicom da atomi žive pri sudaru sa elektronima (koji se kreću ka anodi) mogu primiti (apsorbovati) samo odredjeni (diskretni) iznos energije, približno jednak $4,9\,eV$.

Kada su energije elektrona manje od $4,9\,eV$ ($U_1 < 4,9\,V$) sudar elektrona sa atomima žive je elastičan, tj. elektron ne menja intenzitet svoje brzine, a time i kinetičku energiju. U tom slučaju unutrašnja energija atoma žive se takodje ne menja. Zbog toga elektron stiže na kolektor C, jer mu je energija dovoljno velika da savlada kočeći napon U_2. Sa povećanjem napona U_1 povećava se i struja kolektora i.

Kada napon U_1 dostigne vrednost približno $4,9\,V$ elektron na putu od katode prema anodi dostigne energiju od $4,9\,eV$. Tada je sudar elektrona sa atomima žive neelastičan. U tom slučaju elektroni svu svoju energiju predaju atomima žive, koji zbog toga prelaze u pobudjeno stanje. Utrošivši svu svoju energiju elektroni ne stižu do kolektora C pošto ne mogu da savladaju kočeći napon U_2. Do kolektora stižu samo oni elektroni koji nisu izvršili neelastičan sudar sa atomima žive. Zbog toga se struja i naglo smanjuje.

Kada napon U_1 dostigne takvu vrednost pri kojoj deo elektrona, pretrpevši neelastične sudare sa atomima žive, prikupi energiju izmedju katode i anode neophodnu za savladjivanje kočećeg napon U_2, struja ponovo počinje da raste. Kada napon U_1 dostigne vrednost od $2 \cdot 4,9\,V$, deo elektrona posle prvog neelastičnog sudara ima energiju od $4,9\,eV$ dovoljnu za drugi neelastični sudar sa atomima žive. U tom slučaju elektroni im predaju tu energiju i bivaju zaustavljeni na anodi. Na ovaj način se objašnjava drugi nagli pad struje (vidi grafik na sl. 18.5). Analogno objašnjenje bi važilo za ostale nagle padove struje (za $U_1 \approx 3 \cdot 4,9\,V$ itd.).

Rezultati Frank-Hercovog ogleda pokazuju da elektroni atomima žive mogu predati samo tačno odredjene iznose energije. Vrednost od $4,9\,eV$ je najmanji mogući iznos energije (kvant energije) koji može apsorbovati atom žive u osnovnom stanju. Na ovaj način je Borova pretpostavka o postojanju energetskih stanja u atomu u potpunosti eksperimentalno potvrdjena.

Atom žive, primivši od elektrona pri sudaru energiju od $4,9\,eV$, prelazi u pobudjeno (ekscitirano) stanje i pri vraćanju u osnovno stanje emituje, u skladu sa trećim Borovim postulatom (izraz (18.16)), kvant energije sa frekvencijom $\nu = \Delta E/h$. Talasna dužina emitovanog zračenja je

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} \approx 253,7\,nm. \tag{18.17}$$

Ako je ova teorija tačna, trebalo bi da atom žive bude izvor ultraljubičastih zraka pri njihovom bombardovanju elektronima energije od $4,9\,eV$. Zračenje ove talasne dužine je zaista primećeno u Frank-Hercovom ogledu. Pomoću ovog ogleda nadjeni su takodje diskretni energetski nivoi apsorbcije i emisije i kod drugih atoma, na primer natrijuma, helijuma itd. Razlika je samo u talasnim dužinama emitovanog zračenja.

19. Osnovi fizike atoma i molekula

19.1 Kvantovanje momenta impulsa

Moment impulsa elektrona u atomu u klasičnoj mehanici predstavlja vektrorski proizvod rastojanja i impulsa elektrona, tj.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{19.1}$$

Kvantno-mehaničko odredjivanje momenta impulsa je složen postupak. Zato se ovde daje samo krajnji izraz za odredjivanje njegove brojne vrednosti

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}, \tag{19.2}$$

gde je ℓ ceo broj i naziva se orbitalni kvantni broj koji može imati vrednosti $0, 1, 2, ..., (n-1)$. To znači da su za datu vrednost glavnog kvantnog broja n (dati energetski nivo elektrona u atomu) moguća sledeća kvantna stanja (energetski podnivoi) elektrona u atomu:

$n = 1$	$\ell = 0$	($1s$ stanje)
$n = 2$	$\ell = 0$	($2s$ stanje)
	$\ell = 1$	($2p$ stanje)
$n = 3$	$\ell = 0$	($3s$ stanje)
	$\ell = 1$	($3p$ stanje)
	$\ell = 2$	($3d$ stanje), itd.

Oznake s, p, d, f,... potiču od prvih slova engleskih reči: sharp (oštar), principal (glavni), diffuse (difuzan, rasplinut), fundamental (osnovni), a što je povezano sa istorijski nastalim nazivima serija u spektru atoma natrijuma.

Iz izraza (19.2) proizilazi da elektron u atomu koji se nalazi u s-stanju, tj. u stanju sa $\ell = 0$ ima orbitalni moment impulsa jednak nuli ($L = 0$). Sa tačke gledišta Brove teorije takvo stanje odgovaralo bi putanji elektrona koja prolazi kroz jezgro. Kvantna mehanika dozvoljava postojanje takvih stanja elektrona kod kojih orbitalni moment impulsa nije povezan sa kretanjem po orbiti. Tako, na primer, s-stanja elektrona imaju sferno-simetričnu raspodelu verovatnoća nalaženja pa njihove najverovatnije orbite imaju oblik kružnice, a orbitalni moment im je jednak nuli. Stanja elektrona označena sa p, d, f itd. imaju oblik elipse čiji ekscentricitet (razvučenost) raste sa porastom vrednoosti ℓ, tako da ti elektroni prodiru u unutrašnjost atoma, gde se nalaze elektroni pojedinih nivoa, te trpe dodatnu interakciju. Usled toga menjaju se njihove energije. Kod vodonikvog atoma koji ima samo jedan elektron nema te dodatne interakcije pa zbog toga energija ne zavisi od ℓ kada je električno polje jednako nuli. Eksperimentalna osnova za uvodjenje orbitalnog kvantnog broja je Štarkov (Stark) ogled, tj. Štarkov efekat.

19.2 Prostorno kvantovanje

Iz elektrodinamike je poznato da elektron koji se kreće oko jezgra pored orbitalnog momenta impulsa ima i magnetni orbitalni moment. Vektori orbitalnog momenta impulsa $\vec{L}$ i magnetnog orbitalnog momenta $\vec{p}_m$ imaju isti pravac, a suprotan smer. Veza izmedju ova dva vektora je sledeća:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L} = -g_\ell \vec{L}, \tag{19.3}$$

gde je m masa elektrona, a $g_\ell = e/2m$ orbitalni žiromagnetni odnos. Analogna veza postoji izmedju orbitalnog momenta impulsa i magnetnog orbitalnog momenta za atom kao celinu. Veza izmedju vektora $\vec{L}$ i $\vec{p}_m$ važi i u Borvoj teoriji.

U kvantnoj mehanici nije moguće odrediti orijentaciju vektora $\vec{L}$ i $\vec{p}_m$ u odnosu na ravan elektronske orbite. Za odredjivanje orijentacije ovih vektora mora se odabrati neki pravac u prostoru i položaj vektora $\vec{L}$ može se fiksirati uglom koji ovaj vektor zaklapa sa tim pravcem. Za odredjivanje pravca bira se ili pravac spoljašnjeg magntnog polja koje potiče od svih elektrona, osim onog koji se razmatra i jezgra atoma.

Po klasičnoj fizici vektor $\vec{L}$ (ili $\vec{p}_m$) može imati proizvoljne orijentacije u odnosu na pravac magnetnog polja. Na ovoj pretpostavci zasnovana je teorija paramagnetizma.

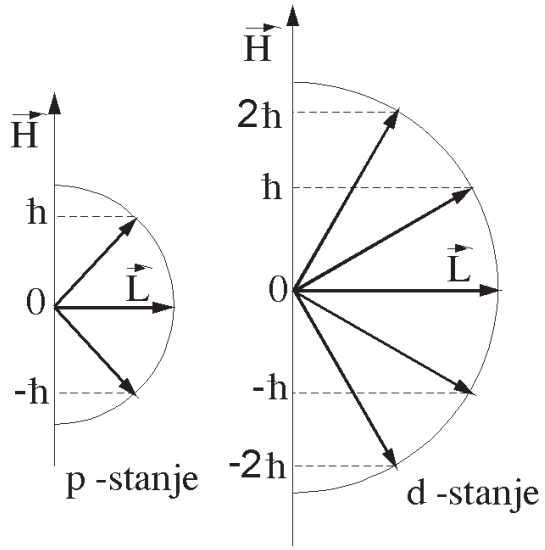
Po Borovoj teoriji proizvoljna orijentacija vektora $\vec{L}$ u prostoru označava da ravan orbite elektrona u prostoru može biti proizvoljno orijentisana u odnosu na spoljašnje magnetno polje. Pokazalo se da su takve pretpostavke pogrešne, pa je usvojen princip koji se naziva princip prostornog kvantovanja. Ovaj princip glasi: *vektor momenta impulsa elektrona $\vec{L}$ može imati samo takve orijentacije u prostoru za koje projekcija L_z vektora $\vec{L}$ na pravac z spoljašnjeg magnetnog polja ima kvantovane vrednosti.*

U kvantnoj mehanici je dokazano da projekcije L_z vektora $\vec{L}$ na pravac z spoljašnjeg magnetnog polja mogu imati samo celobrojne umnoške $\hbar$, tj.

$$L_z = m_\ell \hbar, \tag{19.4}$$

gde m_ℓ može imati vrednosti $0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm \ell$ (ukupno $2\ell + 1$ mogućih vrednosti) i naziva se magnetni kvantni broj. Na slici 19.1 prikazane su moguće orijentacije vektora $\vec{L}$ u odnosu na spoljašnje magnetno polje H za $\ell = 1$ (p-stanje) i $\ell = 2$ (d-stanje).

Eksperimentalna osnova za uvodjenje magnetnog kvantnog broja su Zemanovi (Zeeman) eksperimenti i to normalni i anomalni Zemanov efekat.



Sl. 19.1: Moguće orijentacije vektora $\vec{L}$ u odnosu na pravac spoljašnjeg magnetnog polja $\vec{H}$

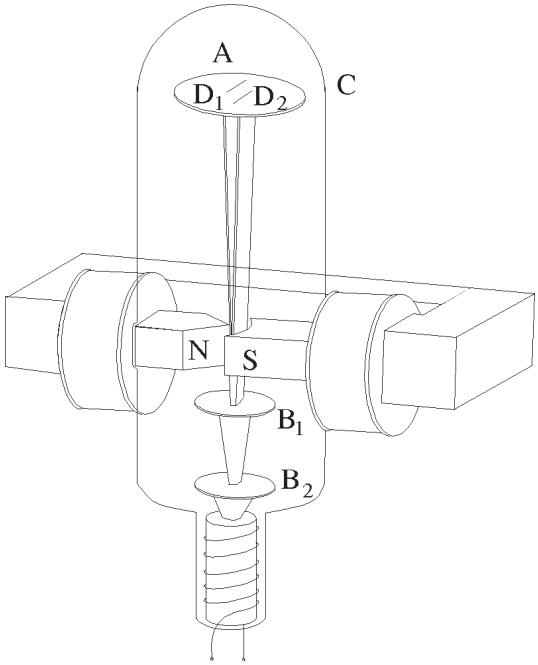
19.3 Štern-Gerlahov eksperiment

Štern (Stern) i Gerlah (Gerlach) vršili su eksperimente u cilju potvrde prostornog kvantovanja. Eksperimenti su izvršeni pomoću uredjaja koji se sastojao iz cevi C u kojoj je ostvaren vakuum od $10^{-3}\,Pa$ (sl. 19.2). U cevi je smešten komad srebra koji može da se zagreva, dve dijafragme B_1 i B_2 sa uskim prorezima širine od 10 do $20\,\mu m$, polovi elektromagneta N i S i staklena ploča A koja služi kao zaklon. Nehomogeno magntno polje je dobijeno pomoću jakog elektromagneta SN sa polovima specijalnog oblika (jedan pol je u obliku oluka, a drugi u obliku sečiva i dopire u oluk).

Kada se srebro zagreje dolazi do isparavanja i njegovi atomi izleću u različitim pravcima. Od ovako emitovanih atoma dijafragme B_1 i B_2 propuštaju jedan uzan snop. Uredjaj se podešava tako da atomi

koji su prošli kroz prvu dijafragmu B_1 prolaze kroz drugu dijafragmu B_2. Tako se dobija snop atoma u kome svi imaju isti smer.

U odsustvu magnetnog polja atomi se kreću pravolinijski i padaju na ploču tako da se dobije tačno u tom pravcu na ploči A slika proreza na dijafragmama kroz koje su prošli. Kada se polje uspostavi, onda bi se po klasičnoj fizici očekivalo da se ovi atomi rasipaju i da se dobiju njihovi tragovi svuda oko sredine ploče A. U tome treba da postoji izvesna kontinualnost i to sa obe strane od centra položaja do izvesne maksimalne vrednosti. Medjutim, eksperimenti su pokazali da se snop atoma cepa na dva dela, pa se umesto jedne slike proreza dobijaju dve slike, D_1 i D_2 koje su simetrično pomerene u odnosu na prvobitni pravac snopa.



Sl. 19.2: Uredjaj za proveru Štern-Gerlahovog eksperimenta

Rezultati Štern-Gerlahovog eksperimenta potvrdili su prostorno kvantovanje, tj. da je orijentacija momenta impulsa atoma srebra u prostoru kvantovana veličina. Naime, deo ovih atoma ima paralelnu, a deo atiparalelnu orijentaciju momenta impulsa u odnosu na linije sila magnetnog polja.

Zamenom izraza (19.2) u (19.3) za magnetni moment elektrona se dobija

$$p_m = \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{\ell(\ell+1)} = \mu_B\sqrt{\ell(\ell+1)}. \tag{19.5}$$

Veličina $\mu_B = e\hbar/(2m) = 9,27.10^{-24}\,JT^{-1}$ naziva se Borov magneton. Prema tome, magnetni moment može da sadrži celobrojne umnoške Borovog magnetona. Štern i Gerlah su za srebro dobili da je projekcija magnetnog momenta atoma na pravac magnetnog polja brojno jednaka Borovom magnetonu. Greška u rezultatu za magnetni moment dobijena na ovaj način ne prelazi 10%. Kao jedinica za merenje magnetnog momenta elektrona u atomu koristi se Borov magneton. Eksperimenti sa drugim elementima prve grupe periodnog sistema elemenata dali su slične rezultate.

19.4 Spin elektrona

Kao što je već istaknuto, Štern-Gerlahov eksperiment je potvrdio prostorno kvantovanje. Rezultati ovog eksperimenta jednoznačno su pokazali da magnetni moment, koji se meri u ovom eksperimentu, dobija dve orijentacije. Ako ne bi postajalo prostorno kvantovanje orijentacija vektora magnetnog momenta atoma $\vec{p}_m$ bila bi proizvoljna.

Štern i Gerlah su u početku vršili eksperimente sa elementima prve grupe periodnog sistema elemenata. Atomi ovih elemenata imaju jedan valentni elektron (jedan elektron u spoljašnjoj orbiti). U

osnovnom stanju atoma ovaj elektron se nalazi u s-stanju, tj. vrednost orbitalnog kvantnog broja ℓ jednak je nuli. Prema tome, u stanju sa $\ell = 0$ orbitalni moment impulsa je jednak nuli, što proizilazi iz izraza (19.2). Ova činjenica je dovela do ozbiljnih poteškoća pri tumačenju Štern-Gerlahovog eksperimenta. Rezultati njihovog eksperimenta sa takvim atomima ne bi trebalo da pokažu prostorno kvantovanje orbitalnog momenta impulsa. Medjutim, oni su to jednoznačno pokazali. Zbog toga su se javile ozbiljne poteškoće u objašnjenju rezultata tog eksperimenta. Ove poteškoće su otklonjene kada su 1925. godine Ulenbek (Uhlenbeck) i Gudšmit (Gudsmit) uveli pretpostavku da elektron rotira oko sopstvene ose. Pošto je elektron naelektrisan, sa takvim kretanjem je povezano i postojanje sopstvenog magnetnetnog polja elektrona. To znači da postoji sopstveni moment impulsa elektrona $\vec{L}_s$ i sopstveni magnetni moment elektrona $\vec{p}_{ms}$. Takva rotacija elektrona poznata je pod nazivom spin elektrona. Često se oba ova momenta nazivaju spinom, a isto tako se spinom elektrona naziva i moment impulsa $\vec{L}_s$.

Rezultati Štern-Gerlahovog eksperimenta, vršeni sa atomima prve grupe periodnog sistema, dobili su jednostavno objašnjenje posle uvodjenja spina elektrona. U eksperimentima se pojavljuje prostorno kvantovanje sopstvenog momenta impulsa $\vec{L}_s$. Slično orbitalnom momentu impulsa $\vec{L}$, sopstveni moment impulsa $\vec{L}_s$ i njegova projekcija L_{sz} na z osu koja se poklapa sa pravcem magnetnog polja moraju biti kvantovane. U kvantnoj mehanici je pokazano da se spin kvantuje po zakonu

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}. \tag{19.6}$$

Izraz (19.6) je analogan izrazu (19.2), ali je umesto kvantnog broja ℓ uveden kvantni broj s koji se naziva spinski kvantni broj.

Projekcija spina L_{sz}, kao što je istaknuto, mora biti kvantovana tako da vektor L_s mora imati $(2s+1)$ orijentacija. Pošto iz rezultata Štern-Gerlahovog eksperimenta proizilaze samo dve orijentacije spina to je $2s+1 = 2$, tj. $s = 1/2$. Spinski kvantni broj ima samo jednu vrednost i po tome se razlikuje od glavnog kvantog broja (n), orbitalnog kvantnog broja (ℓ) i magntnog kvantnog broja (m_ℓ). Iz izraza (19.6) može se naći brojna vrednost spina elektrona

$$L_s = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar. \tag{19.7}$$

Po analogiji sa prostornim kvantovanjem za orbitalni moment impulsa L može se napisati izraz za prostorno kvantovanje spina L_s, tj.

$$L_{sz} = m_s\hbar, \tag{19.8}$$

gde je m_s magnetni spinski kvantni broj koji može imati dve vrednosti $m_s = +1/2$ i $m_s = -1/2$ u saglasnosti sa činjenicom da projekcija spina na pravac magnetnog polja može imati dve vrednosti:

$$L_{sz} = \pm\frac{1}{2}\hbar. \tag{19.9}$$

Često se kaže da je spin elektrona jednak $\pm\hbar/2$ i može biti orijentisan ili u pravcu magnetnog polja ili suprotno njemu. Pri tome se ima u vidu ne sam spin odredjen po izrazu (19.6) već njegova projekcija L_{sz}.

Iz rezultata Štern-Gerlahovog eksperimenta proizilazi da je projekcija sopstvenog magnetnog momenta p_{smz} elektrona jednaka Borovom magnetonu, tj.

$$p_{msz} = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m}. \tag{19.10}$$

Iz izraza (19.9) i (19.10) sledi da je

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m} = g_s, \tag{19.11}$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{p}_{ms} = -g_s\vec{L}_s, \tag{19.12}$$

gde je g_s spinski žiromagnetni odnos i dvostruko je veći od orbitalnog žiromagnetnog odnosa g_ℓ.

19.5 Paulijev princip

Iz dosadašnjeg izlaganja proizilazi da je kretanje elektrona u atomu okarakterisano sa četiri kvantna broja i to glavnim kvantnim brojem n, orbitalnim kvantnim brojem ℓ, magnetnim kvantnim brojem m_ℓ i spinskim kvantnim brojem m_s. Njihove vrednosti prema definicijama su:

glavni kvantni broj

$$n = 1, 2, 3, ...,$$

orbitalni kvantni broj

$$\ell = 0, 1, 2, ..., (n-1),$$

magnetni kvantni broj

$$m_\ell = 0 \pm 1, \pm 2, ..., \pm \ell,$$

(dakle, m_ℓ može imati $2\ell + 1$ vrednosti)

magnetni spinski kvantni broj

$$m_s = +1/2, -1/2.$$

Ako atom sadrži više elektrona oni deluju jedan na drugog silama koje dovode do promene u njihovom kretanju. Medjutim, pokazano je da se sa dobrom aproksimacijom kretanje tih elektrona može opisati sa pomenuta četiri kvantna broja. Iz eksperimentalnih rezultata dobijenih optičko-spektroskopskim metodama Pauli (Pauli) je postavio kvantno-mehanički princip koji se naziva Paulijev princip. Uprošćeno ovaj princim glasi: *u jednom atomu ne mogu da postoje dva elektrona sa jednakim vrednostima sva četiri kvantna broja.*

Za elektrone u atomu Paulijev princip može se napisati u sledećem obliku:

$$N_1(n, \ell, m_\ell, m_s) = 0 \quad ili \quad 1, \tag{19.13}$$

gde je $N_1(n, \ell, m_\ell, m_s)$ broj elektrona koji se nalaze u stanju sa datim kvantnim brojevima n, ℓ, m_ℓ, m_s.

Korišćenjem Paulijevog principa može se odrediti maksimalan broj elektrona u atomu koji se nalaze u stanju sa datim vrednostima tri kvantna broja (n, ℓ, m_ℓ), dva kvantna broja (n, ℓ) i, na kraju, jednim kvantnim brojem (n).

Maksimalan broj N_2 elektrona u atomu koji se nalaze u stanju sa data tri kvantna broja n, ℓ, m_ℓ je

$$N_2(n, \ell, m_\ell) = 2, \tag{19.14}$$

pošto magnetni spinski kvantni broj može imati samo dve vrednosti $+1/2$ i $-1/2$.

Maksimalan broj N_3 elektrona u atomu, koji se nalaze u stanju sa data dva kvantna broja n i ℓ, dobija se prema vrednostima kvantnih brojeva m_ℓ i m_s. Kao što je već istaknuto, kvantni broj m_ℓ može imati $(2\ell + 1)$ vrednosti, a magnetni spinski kvantni broj dve vrednosti, pa je maksimalan broj elektrona sa datim vrednostima kvantnih brojeva n i ℓ

$$N_3(n, \ell) = 2(2\ell + 1). \tag{19.15}$$

Vrednosti $N_3(n, \ell)$ za $\ell = 0, 1, 2, 3$ i 4 date su u tabeli 19.1.

Tabela 19.1: Maksimalan broj elektrona u atomu $N_3(n, \ell)$ odredjen sa dva kvantna broja za pet vrednosti orbitalnog kvantnog broja (ℓ)

ℓ	0	1	2	3	4
Oznaka podnivoa	s	p	d	f	g
$N_3(n, \ell)$	2	6	10	14	18

Maksimalan broj N_4 elektrona u atomu sa datim kvantnim brojem n dobija se na sledeći način. Pošto se ℓ, za odredjenu vrednost n, može menjati od nule do $(n-1)$ to se N_4 dobija sumiranjem izraza (19.15)

po ℓ od 0 do $n-1$, tj.

$$N_4(n) = \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} N_3(n,\ell) = \sum_{\ell=0}^{\ell=n-1} 2(2\ell+1) = [2(n-1)+2]n = 2n^2. \tag{19.16}$$

Elektroni u atomu sa jednakim vrednostima glavnog kvantnog broja n obrazuju energetski nivo (energetsku ljusku). U zavisnosti od vrednosti n razlikuju se K-nivo za $n=1$, L-nivo za $n=2$, M-nivo za $n=3$, N-nivo za $n=4$, O-nivo za $n=5$ itd. U tabeli 19.2 dat je maksimalan broj elektrona N_4 koji se može naći u pojedinim energetskim nivoima.

Tabela 19.2: Maksimalan broj elektrona N_4 u pojedinim energetskim nivoima

n	Ener. nivo	s	p	d	f	g	N_4
1	K	2					2
2	L	2	6				8
3	M	2	6	10			18
4	N	2	6	10	14		32
5	O	2	6	10	14	18	50

U svakom energetskom nivou elektroni su rasporedjeni u podnivoe (podljuske). Podnivo odgovara odredjenoj vrednosti orbitalnog kvantnog broja ℓ kao što se vidi iz tabele 19.2.

Paulijev princip je odigrao važnu ulogu u razvitku savremene atomske i nuklearne fizike. Tako, na primer, bez njega ne bi mogla da se formira teorija čvrstih tela. Na osnovu Paulijevog principa može se, na primer, objasniti periodini sistem elemenata.

20. Osnovi nuklearne fizike

20.1 Osnovne karakteristike jezgra

Posmatranjem rasejanja brzih alfa-čestica pri prolasku kroz metalne folije. Raderford je došao do zaključka da se atom sastoji od pozitivno naelektrisanog jezgra oko koga kruže elektroni.

Masenospektroskopska ispitivanja pokazala su da joni vodonika imaju najmanju masu i da im je naelektrisanje jednako naelektrisanju elektrona ali suprotnog znaka. Ovi joni su nazvani protoni. Kasnija istraživanja pokazala su da ostali elementi imaju jezgra čije su mase bliske celobrojnom umnošku mase protona. Da bi se objasnilo poreklo mase jezgra bilo je prvo pretpostavljno da jezgro relativne atomske mase A sadrži A protona. Kada bi to bio slučaj, jezgro bi trebalo da sadrži i isti broj pozitivnih elementarnih naelektrisanja, što nije slučaj. Broj jediničnih naelektrisanja jednak je rednom broju elemenata u periodnom sistemu, a to je u početku periodnog sistema približno jednako polovini atomske mase. Zato je pretpostavljeno da jezgro atoma sem A protona sadrži i $(A - Z)$ elektrona, tako da oni neutrališu odgovarajući broj protona u njemu. U tom slučaju slobodno pozitivno naelektrisanje jezgra iznosi $A - (A - Z) = Z$ i jednako je rednom broju elemenata u periodnom sistemu, dok se broj protona A slaže sa brojnom vrednošću atomske mase tog elementa. Polazeći od ovakve pretpostavke o naelektrisanju i masi jezgra postojanje izotopa moglo bi da se objasni time da postoje atomi sa istim brojem slobodnih pozitivnih nalektrisanja, a da u njima varira broj protona čije je naelektrisanje neutralisano prisustvom istog broja elektrona. Ovakvu pretpostavku potvrdili su eksperimenti vršeni u cilju identifikacije beta-čestica koje emituju jezgra pojedinih elemenata pri njihovom spontanom raspadu. Pokazano je da su beta-čestice brzi elektroni koje emituje jezgro. Medjutim, bilo je veoma teško objasniti kako je moguće da se nadje toliko veliki broj protona u veoma maloj zapremini (jezgru), a da se ne razlete usled delovanja Kulonovih sila. Ova teškoća je otklonjena uvodjenjem druge pretpostavke da jezgro sem pozitivno naelektrisanih čestica - protona sadrži i neutralne čestice čija je masa bliska masi protona. Te čestice nazvane su neutroni. Prema tome, jezgro se sastoji od protona i neutrona koji se jednim imenom nazivaju nukleoni. Broj protona u jezgru Z predstavlja broj naelektrisanja ili, kad se govori o odgovarajućem atomu, atomski broj. Naelektrisanje jezgra može se izraziti na sledeći način:

$$q_j = Ze^+, \tag{20.1}$$

gde je e^+ pozitivno naelektrisanje brojno jednako naelektrisanju elektrona.

Broj nukleona u jezgru A naziva se maseni broj ili nuklearni broj. Ako se sa N označi broj neutrona u jezgru tada se maseni broj može izraziti na sledeći način:

$$A = Z + N. \tag{20.2}$$

Masa jezgra je približno jednaka masi atoma. Obično se izražava u atomskim jedinicama mase u. Za $1\,u$ uzima se $1/12$ mase izotopa ugljenika čiji je maseni broj 12. Prema tome $1\,u = (1,66043 \pm 0,00031).10^{-27}\,kg$.

Mase protona m_p i neutrona m_n iznose:

$m_p = (1,00727663 \pm 0,00000008)\,u = (938,550 \pm 0,005)\,MeV/c^2$,

$m_n = (1,0086654 \pm 0,0000004)\,u = (939,550 \pm 0,005)\,MeV/c^2$.

Jezgro se simbolično predstavlja sa ${}^A_Z X$, gde slovo X označava hemijski element, donji indeks označava atomski broj, a gornji maseni broj.

Prve pretpostavke o dimenzijama atomskog jezgra su dobijene iz Raderfordovih istraživanja. Kasnija istraživanja sa rasejanjem brzih neutrona i elektrona na različitim jezgrima pokazala su da jezgro nema konstantnu gustinu ϱ, već se njegova gustina postepeno smanjuje sa rastojanjem r od centra (sl. 20.1).

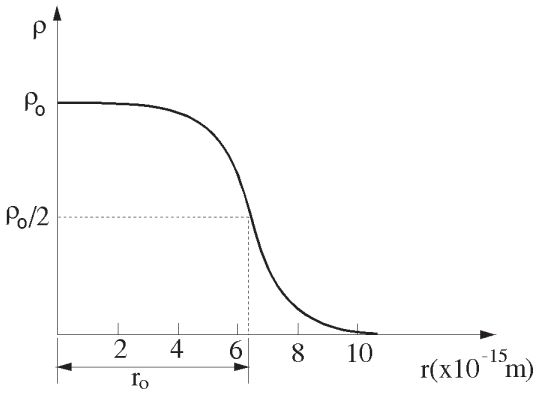
Poluprečnik r_o je ono rastojanje od centra jezgra na kome se gustina smanji za polovinu njene vrednosti u centru jezgra. Poluprečnik bilo kojeg jezgra može se izračunati po sledećoj empirijskoj formuli:

$$r_o = (1,45 - 1,50).10^{-15}\sqrt[3]{A} \quad m. \tag{20.3}$$

Ova formula pokazuje da se zapremina jezgra

$V = 4r_o^2\pi/3 \sim A$

linearno povećava sa brojem nukleona u jezgru.



Sl. 20.1: Ğustina jezgra u funkciji rastojanja od njegovog centra

Iako sva jezgra nisu sfernog oblika, dimenzije jezgra se odredjuju pomoću njihovih poluprečnika. Sferni oblik u nepobudjenom stanju imaju samo najstabilnija jezgra koja se nazivaju magična jezgra, dok su ostala jezgra deformisana i najčešće imaju oblik paraboloida.

Jezgra sa jednakim atomskim brojem Z, a različitim masenim brojevima A nazivaju se izotopi. Većina hemijskih elemenata ima po nekoliko izotopa. Tako, na primer, vodonik ima tri izotopa: ${}_1^1\mathrm{H}$ ($Z = 1$, $N = 0$), ${}_1^2\mathrm{H}$ ($Z = 1$, $N = 1$) koji se naziva deuterijum i ${}_1^3\mathrm{H}$ ($Z = 1$, $N = 2$) koji se naziva tricijum. Deuterijum i tricijum označavaju se simbolima D i T. Običan vodonik i deuterijum su stabilni, dok je tricijum radioaktivan. Kiseonik takodje ima tri izotopa, olovo deset itd.

Jezgra sa jednakim masenim brojevima A, a različitim vrednostima atomskog broja Z nazivaju se izobarna jezgra. Takva jezgra su, na primer ${}_{18}^{40}\mathrm{Ar}$ i ${}_{20}^{40}\mathrm{Ca}$.

Jezgra sa jednakim brojem neutrona $N = A - Z$ nazivaju se izotona jezgra. Tu spadaju na primer, ${}_6^{13}\mathrm{C}$ i ${}_7^{14}\mathrm{N}$. Postoje i radiaktivna jezgra sa jednakim vrednostima Z i A koja se razlikuju po vremenu poluraspada. Takva jezgra nazivaju se izomeri. Na primer, postoje dva izomera jezgra ${}_{35}^{80}\mathrm{Br}$. Kod jednog je vreme poluraspada $18\,min$, a kod drugog $4,4\,h$.

Poznato je oko 1500 jezgara koja se razlikuju bilo po vrednošću Z ili A ili jednom i drugom. Približno 1/5 od njih su stabilna jezgra, a ostala su radioaktivna. Mnoga jezgra su dobijena veštačkim putem pomoću nuklearnih reakcija.

U prirodi postoje elementi sa atomskim brojem Z od 1 do 92, sem tehnecijuma (Tc, $Z = 43$) i prometijuma (Pm, $Z = 61$). Plutonijum (Pu, $Z = 94$) je prvo dobijen veštačkim putem, a kasnije se ustanovilo da se u malim količinama nalazi u prirodi. Ostali transuranski elementi su dobijeni veštačkim putem pomoću raznih nuklearnih reakcija.

20.2 Energija veze i defekt mase atomskog jezgra

Eksperimentalno je pokazano da je masa jezgra manja od zbira masa nukleona koji ga obrazuju. To znači da je energija jezgra manja od zbira energije slobodnih nukleona koji ga obrazuju. Zato je za razlaganje jezgra na njegove sastavne delove potrebno da se utroši odredjena količina energije. Takodje se pri

obrazovanju jezgra od slobodnih nukleona oslobadja ista količina energije koja se utroši pri njegovom razlaganju.

Energija E koja se oslobadja pri obrazovanju jezgra, odnosno energija koja povezuje nukleone u jezgro, naziva se energija veze. Njene vrednosti za pojedina jezgra date su u dodatku II

Ako se neko jezgro sastoji od Z protona i $A-Z$ neutrona, onda je energija veze takvog sistema data izrazom:

$$E = [Zm_p + (A-Z)m_n - m_j]c^2 = \Delta mc^2, \tag{20.4}$$

gde su m_p, m_n i m_j odgovarajuće mase protona, neutrona i jezgra. Veličina

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_j \tag{20.5}$$

naziva se defekt mase jezgra. Za ovu veličinu smanjuje se masa svih nukleona kada se od njih obrazuje jezgro.

Masa atomskog jezgra može se veoma precizno odrediti pomoću masenog spektrografa. Ovo omogućava da se odredi defekt mase bilo kojeg jezgra i izračuna energija veze korišćenjem izraza (20.4).

Ilustracije radi biće odredjena energija veze jezgra helijuma. Ono se sastoji iz dva protona i dva neutrona. Ako se uzme da je masa protona $m_p = 1,0073\,u$, a masa neutrona $m_n = 1,0087\,u$, masa nukleona koji obrazuju jezgro je $2m_p + 2m_n = 4,032\,u$. Masa jezgra atoma helijuma je $m_j = 4,0016\,u$. Defekt mase atomskog jezgra helijuma je

$\Delta m = 4,0320 - 4,0016 = 0,0304\,u \approx 5.10^{-29}\,kg.$

Korišćenjem izraza (20.4) za energiju veze jazgra helijuma dobija se sledeća vrednost:

$E = \Delta mc^2 \approx 28\,MeV.$

Brojna vrednost za E kada je $\Delta m = 1\,u$ je

$c^2.1\,u = 9.10^{16}1,66.10^{-27}/(1,6.10^{-19})\,eV = 931\,MeV$

pa se izraz (20.4) može napisati u sledećem obliku:

$$E = 931[Zm_p + (A-Z)m_n - m_j]\,MeV, \tag{20.6}$$

gde broj 931 predstavlja energetski ekvivalent defekta mase od $1\,u$.

Pored energije veze definiše se i srednja energija veze E_v po nukleonu koja predstavlja odnos energije veze E i masenog broja A, tj.

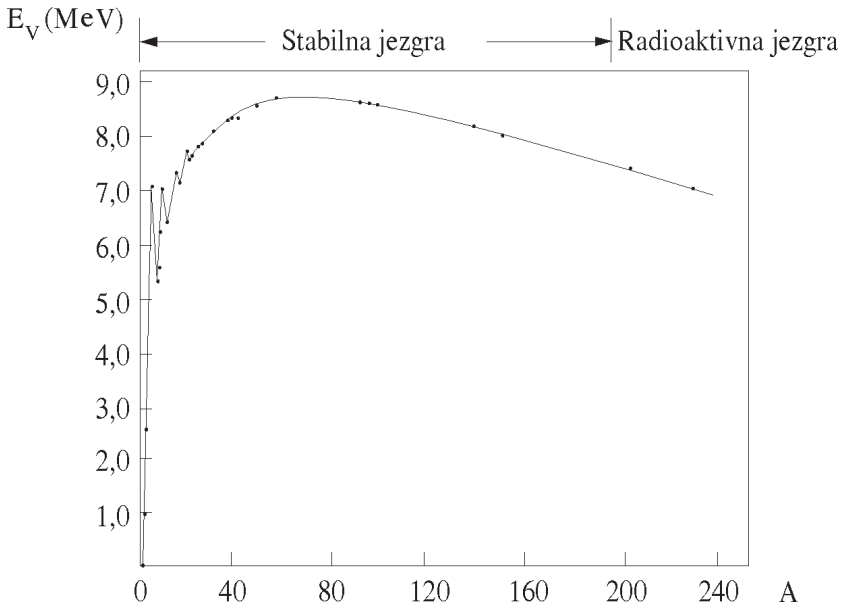
$$E_v = \frac{E}{A} \tag{20.7}$$

Kod jezgara helijuma je $E_v = 28/4 = 7\,MeV$.

Zavisnost energije veze po nukleonu od masenog broja prikazana je na slici 20.2. Sa slike se vidi da je energija veze po nukleonu različita za različita jezgra, tj. nukleoni u različitim jezgrima nisu vezani istom energijom. Najjače su vezana jezgra sa masenim brojem od 50 do 80 kod kojih srednja energija po nukleonu iznosi oko $8,7\,MeV$. Kod jezgara sa masenim brojem većim od 80 energija veze opada sa porastom rednog broja elementa, tako da kod urana iznosi $7,5\,MeV$.

Kod lakih jezgara koja sadrže mali broj nukleona srednja energija veze po nukleonu opada sa smanjenjem broja nukleona. Karakteristično za ovu grupu jezgara je pojava oštrih maksimuma i minimuma.

Podaci o energiji veze po nukleonu u jezgru mogu se pratiti preko dijagrama prikazanog na slici 20.3, gde je na apcisnu osu nanesen broj protona, a na ordinatnu broj neutrona $N = A - Z$ jezgara. Crnim kružićima su prikazani stabilni, a belim neki od radioaktivnih izotopa elemenata. Sa grafika se može zapaziti da je kod stabilnih izotopa lakih jezgara broj protona približno jenaka broju neutrona, tj. atomski broj je $A \approx 2Z$. Ovi elementi leže približno na pravoj $A - Z = Z$. Ovakvo ponašanje proizilazi iz činjenice da su sile izmedju protona $(p-p)$ i neutrona $(n-n)$ jednake i manje su od sila izmedju protona i neutrona $(n-p)$.



Sl. 20.2: Energija veze po nukleonu E_v u funkciji masenog broja A

Kod stabilnih izotopa elemenata, kod kojih je $Z > 20$, da bi se održala njihove stabilnost, broj neutrona treba da je veći od broja protona, pri čemu višak neutrona raste sa porastom atomskog ili masenog broja. Ovo se objašnjava činjenicom da se sa porastom atomskog broja jezgra povećava broj protona u njemu. Ovo povećanje uslovljava porast odbojne Kulonove sile koja teži da razori jezgro. Da bi se ova sila savladala potrebno je da jezgro sadrži što više neutrona pošto oni deluju samo privlačnim silama. Višak neutrona u jezgru dovodi do dodatnih sila $(n-n)$ i $(n-p)$ koje kompezuju Kulonove sile, što utiče na povećanje njegove stabilnosti.

Kod stabilnih jezgara gde je $Z > 60$ dejstvo Kulonove odbojne sile izmedju protona postaje sve značajnije, što ima za posledicu smanjenje energije veze po nukleonu (sl. 20.2).

Kada se kroz najveću gustinu crnih kružića (sl. 20.3), koji predstavljaju stabilne izotope, povuče kriva onda se preko nje može odrediti najpovoljniji odnos protona i neutrona, koji obezbedjuje stabilnost za jezgro bilo kojeg elementa. Jezgra koja imaju isti broj protona, a različiti broj neutrona, udaljena od krive stabilnosti, nisu stabilna i spontano se transformišu prelazeći u stabilna jezgra.

20.3 Nuklearne sile. Modeli jezgra

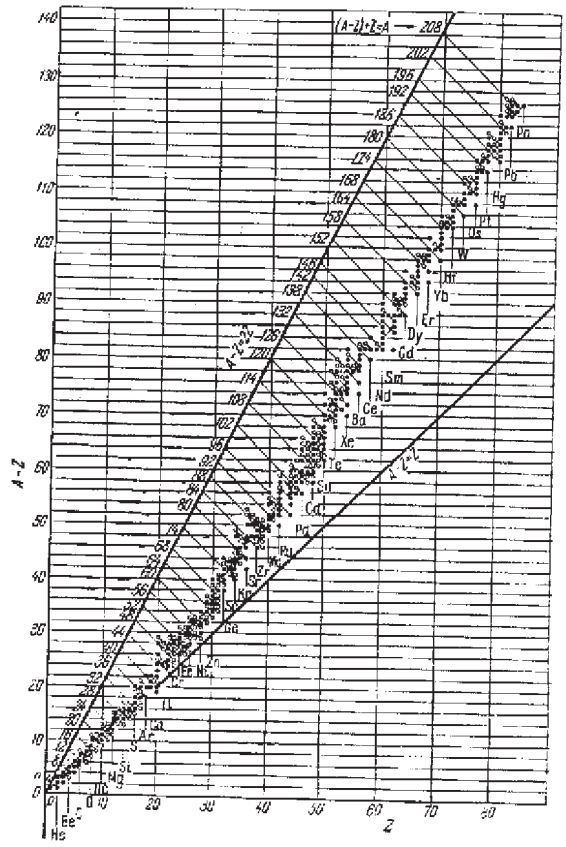
Medju nukleonima koji ulaze u sastav jezgra deluju privlačne sile čiji je intezitet znatno veći od odbojnih Kulonovih sila medju protonima. Takve sile nazivaju se nuklearne sile.

Eksperimenti sa rasejavanjem nukleona na jezgrima i nuklearne reakcije su pokazali da su nuklearne sile po svom intenzitetu znatno veće od gravitacionih i elektromagnetnih sila. Nuklearne sile spadaju u grupu sila jake interakcije. To su sile koje deluju na malim rastojanjima reda $10^{-15}\,m$. Nuklearne sile ne razlikuju protone i neutrone, tj. podjednako deluju na protone i neutrone. To pokazuje da one imaju neelektričnu prirodu.

Nuklearne sile ispoljavaju pojavu zasićenja, tj. svaki nukleon u jezgru deluje samo na ograničeni broj najbližih nukleona.

Nuklearne sile zavise od orijentacije spinova nukleona koji sačinjavaju jezgro. Na primer, proton i neutron obrazuju deuterijum samo u slučaju paralelnih orijentacija spinova.

Složeni karakter nuklearnih sila i teškoće tačnog rešavanja kretanja svih nukleona koji ulaze u sastava jezgra nisu omogućili da se do danas postavi jedinstvena teorija atomskog jezgra. Zbog toga se pri rešavanju ovog kompleksnog problema pribegava parcijalnom posmatranju komponenata jezgra, uvodjenju odredjenih pretpostavki koje omogućavaju matematičku interpretaciju postojećih metoda. Ovo dovodi do stvaranja različitih modela strukture jezgra pomoću kojih se tumače svojstva i pojave u njima.



Sl. 20.3: Zavisnost broja neutrona $(A - Z)$ od atomskog broja Z

Neki modeli objašnjavaju stabilnost jezgra, zasićenost nuklearnih sila, veličinu spinova, magnetne momente i slično, dok drugi objašnjavaju interakciju jezagra sa drugim česticama. Kod ovih tumačenja se vrlo često polazi od različitih, pa čak i kontradiktornih pretpostavki o strukturi i zakonitostima u jezgru. Medjutim, svaki od postojećih modela sam ili uzajamnom dopunom, dovodi do uspešnog objašnjenja pojedinih problema u vezi sa strukturom jezgra.

Postoji više modela koji su se uglavnom razvili u dva na izgled suprotna pravca. Medjutim, kod jednih modela se smatra da medju nukleonima postoje intenzivna uzajamna dejstva, dok je kod drugih obrnuto, tj. nukleoni su slabo vezani, tako da se skoro slobodno kreću u jezgru.

Model kapi je jedan od najjednostavnijih modela atomskog jezgra. On se zasniva na analogiji u ponašanju nukleona u jezgru sa ponašanjem molekula u kapi tečnosti. Nuklearne sile koje deluju medju nukleonima u jezgru, prema ovom modelu, imaju veoma kratak domet, slično silama koje vladaju medju molekulima kapi tečnosti. Osim toga srednja dužina slobodnog puta nukleona, slično kao kod molekula tečnosti, je mala u odnosu na dimenzije jezgra. Stoga nukleoni u jezgru deluje jedan na drugi silama velikog intenziteta i vrlo brzo učestvuju u raspodeli viška energije koju je primio bilo koji nukleon.

Model kapi je poslužio za izvodjenje formule za energiju veze u funkciji masenog broja. Takodje je uspešno primenjen za objašnjenje nuklearne fisije.

Pomoću modela kapi su objašnjena samo neka svojstva jezgra i to mahom za slučajeve kada se jezgro može posmatrati kao skup većeg broja nukleona. Tako se pri objašnjenju fizije jezgra mora uzeti u obzir dužina slobodnog puta nukleona. Detaljna proučavanja dovela su do saznanja da je srednja dužina slobodnog puta pojedinih nukleona mnogo veća nego što predvidja ovaj model. Zbog toga su neka druga svojstva jezgra efikasnije objašnjena pomoću drugih modela, prema kojima se smatra da sile medju nukleonima nisu toliko velikog intenziteta kao kod modela kapi.

Model orbita pretpostavlja da su nukleoni u jezgru, slično elektronima u omotaču atoma, rasporedjeni

na diskretne energetske nivoe (orbite). Popunjavanje ovih nivoa vrši se po Paulijevom principu pošto je spin nukleona jednak $\hbar/2$. Stabilnost jezgra zavisi od popunjenosti ovih nivoa. Jezgra sa potpuno popunjenim nivoima su najstabilnija i nazivaju se magična jezgra. Eksperimentalno je pokazano da su magična jezgra ona čiji je broj protona ili neutrona 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Jezgra kod kojih se magičnost pojavljuje i usled broja protona Z i broja neutrona N nazivaju se dvostruko magična jezgra. Takvih jezgara ima svega pet:

$^4_2He\,(Z=2,N=2)$; $\quad ^{16}_{8}O\,(Z=8,N=8)$;

$^{40}_{20}Ca\,(Z=20;N=20)$; $\quad ^{48}_{20}Ca\,(Z=20,N=28)$;

$^{208}_{82}Pb\,(Z=82,N=126)$

Dvostruko magična jezgra su najstabilnija jezgra.

Prema modelu orbita pretpostavlja se da su nukleoni rasporedjni u jezgru na odredjenim nivoima, pa se svaki nukleon nalazi u nekom srednjem polju ostalih nukleona. Prema tome rezultanta uzajamnog dejstva nukleona je uglavnom jednaka nuli unutar jezgra, a različita od nule samo na površini jezgra.

Model orbita je omogućio da se objasni spin i magnteni moment jezgra, a takodje i pojedinačne promene njihovih svojstva. Ovaj model se veoma dobro može primeniti za opisivanje lakih i srednjih jezgara kao i jezgara koji se nalaze u osnovnom (nepobudjenom) stanju.

Kolektivni model predstavlja kompromis izmedju modela kapi i modela orbita. Prema ovom modelu nukleoni, koji nisu rasporedjeni na nivoe zbog centrifugalne sile, vrše pritisak na površinu jezgara zbog čega se ono deformiše. Usled deformacije jezgro gubi sfernu simetričnost, što dovodi do pojave vibracionog i rotacionog kretanja kao kod višeatomskih molekula. Deformacije se javljaju kako kod jezgara sa parnom, tako i neparnom vrednošću masenog broja.

Kolektivni model omogućava izračunavanje magnetnih momenata čije se vrdnosti veoma dobro slažu sa eksperimentom. Prema ovom modelu nukleoni se nalaze u polju sa slabo promenljivim potencijalom i kreću se skoro nezavisno jedan od drugog.

Pomoću kolektivnog modela veoma uspešno se može objasniti ekscitacija jezgra sa malim energijama pobudjivanja. Naime, prema ovom modelu, ekscitacija jezgra ne potiče od ekscitacije nekog posebnog nukleona (kako to objašnjava model orbita) već od pobudjivanja jezgra kao celine. Usled toga nastaje kretanje jezgra koje je slično rotaciji. Kako se na rotaciono kretanje mogu primeniti metode kvantne mehanike, to se u ovom slučaju može izračunati energija kretanja. Izračunate vrednosti energije, koje odgovaraju različitim vrednostima orbitalnog kvantnog broja, dobro se slažu sa vrednostima energije ekscitacije.

Kolektivni model realnije opisuje ponašanje jezgra od modela kapi i modela orbita. On uzima u obzir bitne osobine modela kapi i modela orbita, kao i značaj kvantnih brojeva za pojedine nukleone u jezgru. Medjutim, i pored znatnih prednosti, ovaj model ne rešava sve probleme niti daje potpuno zadovoljavajuću teoriju jezgra.

Model Fermijevog gasa polazi od pretpostavke da se nukleoni u jezgru kreću nezavisno. Nuklearne sile izmedju nukleona su zanemarljive, izuzev za obrazovanje potencijalne jame. Ako se u ovako zamišljeno jezgro nukleoni kreću haotično, jezgro se može razmatrati na osnovu statističkih zakonitosti. Kako su nukleoni fermioni (spin jednak $\hbar/2$) oni podležu Fermi-Dirakovoj statistici. Pomoću ove statistike odredjuje se energetsko stanje u jezgru i njihova raspodela (širina i gustina).

Model Fermijevog gasa polazi od pretpostavke da medju nukleonima pored privlačnih sila postoje i odbojne sile. Ako bi postajale samo privlačne sile jezgro bi moralo da ima mnogo veću gustinu i energiju nego što je eksperimentalno utvrdjeno.

Pomoću modela Fermijevog gasa mogu se objasniti mnoga svojstva jezgra pri niskim, pa i srednjim energijama ekscitacije.

Optički model. Jedan od glavnih problema nuklearne fizike je u izučavanju interakcije izmedju jezgra i nukleona koji pogadjaju to jezgro, odnosno kakva je priroda nastalih nuklearnih reakcija. Naime, pri interakciji nukleona i jezgra važnu ulogu ima energija ekscitacije jezgra. Ako je ta energija relativno mala onda se može primeniti model Fermijevog gasa. Medjutim, kada su te energije veće model Fermijevog

gasa ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Optički model jezgra uzima u obzir i shvatanje o nezavisnom kretanju nukleona u jezgru i shvatanje o nastajanju složenog jezgra kada ono biva pogodjeno nukleonom spolja. Prema tom modelu jezgro deluje na upadni nukleon kao neka vrsta potencijalne jame. Na osnovu proračuna korišćenjem korpuskularno-talasne prirode nukleona pokazano je da se u jezgru apsorbuju upadni talasi usled čega se formira složeno jezgro.

Optički model je doprineo izučavanju i analizi efektivnih preseka rasejavanja korpuskula-talasa pri nailasku na jezgro. Medjutim, veoma malo je doprineo izučavanju toka i prirode samih reakcija koje nastaju pre i posle nailaska nukleona na jezgro.

Model alfa-čestica. Pošto su eksperimenti pokazali da mnoga jezgra emituju alfa-čestice došlo se na ideju o stavaranju takvog modela atomskog jezgra prema kojem bi alfa-čestica u njemu egzistirala kao celina. Poznato je da je energija veze alfa-čestice oko $29\,MeV$, što znači da ju je teško razložiti na nukleone. Sem toga alfa-čestica se ne formira u jezgru trenutno i slučajno. Takodje je poznato da su vrlo stabilna i ona jezgra kod kojih je broj protona jednak broju neutrona, pa se takva jezgra često nazivaju "alfa-jezgra".

Na osnovu modela alfa-čestice delimično je objašnjena energija veze jezgra. Za laka jezgra pretažan deo energije veze otpada na alfa-čestice, od kojih su sastavljena. Mali deo energija (oko 10%) otpada na energiju veze izmedju alfa-čestica. Energija veze se ne povećava znatno u jezgrima sa po jednim nukleonom većim od broja deljivog sa četiri. Isto tako, ta energija se ne povećava znatno ni u jezgrima sa dva i sa tri nukleona iznad masenog broja deljivog sa četiri. Medjutim, u jezgrima sa četvrtim nukleonom dolazi do naglog skoka u povećanju energije veze zbog formiranja nove alfa-čestice.

Pomoću modela alfa-čestice u jezgru moguće je objasniti neka svojstva jezgra sa parnim brojem nukleona. Medjutim on je praktično neprimenljiv za ona jezgra koja sadrže neparan broj nukleona.

20.4 Prirodna radioaktivnost

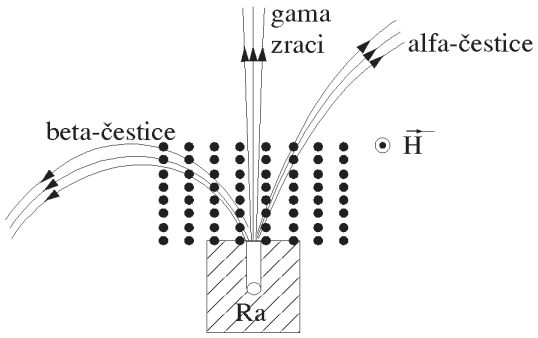
Pod prirodnom radioaktivnošću podrazumeva se spontani prelaz jednog atomskog jezgra u drugo praćen emisijom različitih oblika radioaktivnog zračenja (alfa i beta-čestica i gama-zračenja). Pored prirodne postoji i veštačka radioaktivnost, gde jezgra, pored alfa, beta i gama-zračenja mogu emitovati jedan ili dva protona.

Bekerel (Becquerel) je 1896. godine pri izučavanju luminescencije soli urana slučajno otkrio spontanu emisiju zračenja koje je nezavisno od promene spoljašnjih uslova kao što su osvetljenost, pritisak i temperatura. Pokazano je da ovo zračenje deluje na fotografsku ploču, jonizuje vazduh, deo njega prolazi metalnu ploču znatne debljine i izaziva luminescenciju odredjenih materijala.

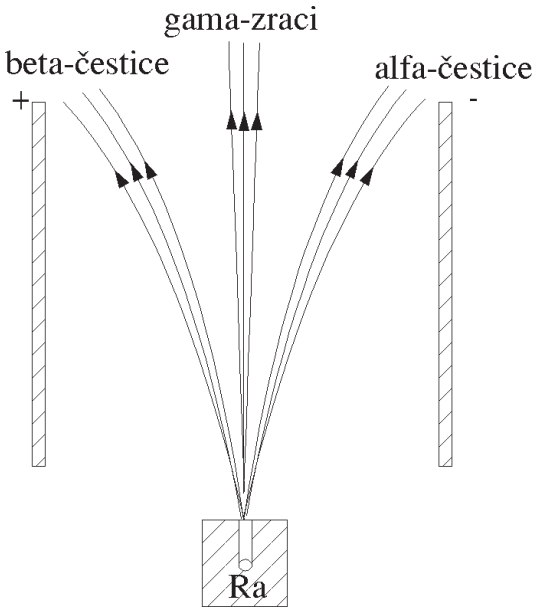
Proučavanje ovog zračenja vršila je M.S. Kiri (Curie). Zapazila je da je pehblenda (75% U_3O_8), praćena sa bizmutom i barijumom, mnogo aktivnija od samog urana. Bizmut je praćen polonijumom, a barijum radijumom, tj. otkrila je radioaktivne elemente za koje se do tada nije znalo, prateći njihovo zračenje.

Kada zračenje koje emituju pojedini elementi prodje kroz magnetno polje koje je normalno na ravni crteža (sl. 20.4) jedan njegov deo će skrenuti sa prvobitnog pravca prostiranja na način na koji bi u ovom polju skrenule pozitivno naelektrisane čestice. Drugi deo snopa će skrenuti kao što bi skrenule negativno naelektrisane čestice, dok treći deo snopa neće skrenuti.

Ako se snop zračenja iz radioaktivnog izvora propusti kroz električno polje kondenzatora sa paralelnim elektrodama, takodje se razlaže na tri dela, od kojih jedan skreće ka negativnoj elektrodi, drugi ka pozitivnoj elektrodi, a treći ne menja pravac kretanja (sl. 20.5). I ovaj ogled pokazuje da se snop iz radioaktivnog izvora sastoji od tri vrste zračenja. Zračenje koje se u električnom i magnetnom polju ponaša kao snop pozitivno naelektrisanih čestica naziva se alfa (α) zračenje. Zračenje koje se u ovim poljima ponaša kao snop negativno naelektrisanih čestica naziva se beta (β) zračenje, dok se zračenje koje ne menja pravac svog kretanja naziva gama (γ) zračenje.



Sl. 20.4: Cepanje snopa radioaktivnog zračenja u magnetnom polju normalnom na ravni crteža



Sl. 20.5: Cepanje snopa radioaktivnog zračenja u električnom polju kondenzatora

20.5 Zakon radioaktivnog raspada

Radioaktivna jezgra se raspadaju (dezintegrišu), sa odredjenom verovatnoćom, nezavisno jedan od drugog. Prema tome, broj radioaktivnih jezgara dN koji se raspadne za vremnski interval dt proporcionalan je broju prisutnih jezgara N i vremenskom intervalu dt:

$$dN = -\lambda N dt, \tag{20.8}$$

gde je λ konstanta radioaktivnog raspada i predstavlja karakterističnu veličinu za svaki radioaktivni element. Znak minus uzima se zbog toga što se pri radioaktivnom raspadu broj aktivnih jezgara datog elementa smanjuje.

Izraz (20.8) može se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \tag{20.9}$$

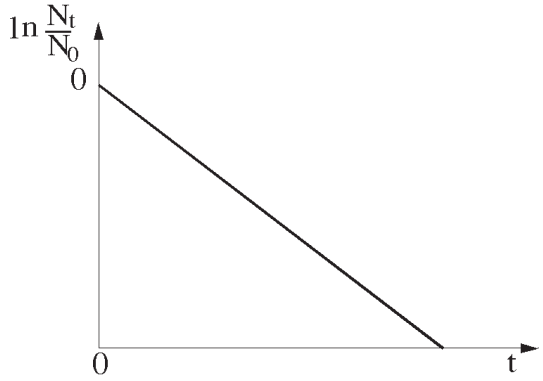
Integracijom gornjeg izraza u datim granicama

$$\int_{N_o}^{N_t} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_o^t dt \tag{20.10}$$

dobija se

$$N_t = N_o \exp(-\lambda t), \tag{20.11}$$

gde je N_o broj jezgara na početku posmatranja ($t = 0$), a N_t broj neraspadnutih jezgara posle vremena t. Izraz (20.11) predstavlja zakon radioaktivnog raspada. Iz njega se vidi da se broj neraspadnutih jezgara smanjuje sa vremenom po eksponencijalnom zakonu.



Sl. 20.6: Zavisnost $ln(N_t/N_o)$ od vremena t

Na slici 20.6 data je zavisnost $\ln N_t/N_o$ od vremena t. Nagib date prave odredjuje brzinu raspada jezgara nekog elementa i konstantu radioaktivnog raspada.

Broj jezgara koji se raspadne za vreme t odredjuje se iz izraza

$$N_o - N = N_o[1 - \exp(-\lambda t)]. \tag{20.12}$$

Vreme za koje se raspadne polovina prvobitnog broja jezgara naziva se vreme ili period poluraspada T. Ono se odredjuje iz uslova da je $N_t = N_o/2$, pa je

$$\frac{1}{2}N_o = N_o \exp(-\lambda T), \tag{20.13}$$

odakle se dobija da je

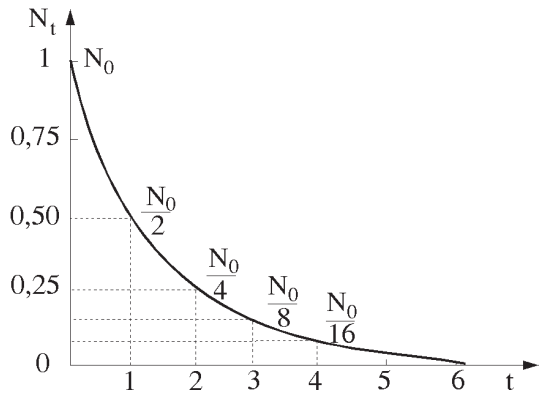
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \tag{20.14}$$

Vreme poluraspada do danas poznatih elemenata kreće se od $3.10^{-7}\,s$ do 5.10^{15} godina.

Iz izraza (20.11) i (20.14) za N_t se dobija

$$N_t = N_o \exp(-\frac{\ln 2}{T}t). \tag{20.15}$$

Zavisnost broja neraspadnutih jezgara N_t od vremena t prikazana je na slici 20.7. Sa slike se vidi da se broj neraspadnutih jezgara radioaktivnog elementa u toku vremena asimtotski približava nuli. Praktično se može smatrati da se potpuni raspad nekog radioaktivnog elementa izvrši za $10\,T$, tj. kada od ukupnog početnog broja jezgara ostane neraspadnut njihov hiljaditi deo ($N_t = 0,001N_o$).



Sl. 20.7: Broj neraspadnutih jezgara N_t u funkciji vremena t

Poznato je da se radioaktivni raspad jezgara nekog radioaktivnog elementa odigrava po statističkom zakonu. To znači da se ne može predvideti vreme posle koga će doći do raspada odredjenog jezgra. Pošto radioaktivna jezgra jednog istog elementa imaju različita vremena života koja se kreću od nule do beskonačnosti, definiše se srednje vreme života radioaktivnog elementa kao statistički prosek vremena

života većine jezgara. Srednje vreme života se dobija iz zbira vremena života svih radioaktivnih jezgara t, podeljenog sa početnim brojem jezgara N_o, tj.

$$\tau = -\frac{1}{N_o}\int_o^\infty t dN(t) = \frac{1}{N_o}\int_o^\infty t\lambda N_t(t)dt. \tag{20.16}$$

Zamenom izraza (20.11) za $N_t(t)$ u (20.16) dobija se

$$\tau = \frac{1}{N_o}\int_o^\infty t\lambda N_o \exp(-\lambda t)dt = \int_o^\infty t\lambda \exp(-\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{20.17}$$

Kao što se vidi iz izraza (20.16), srednje vreme života predstavlja recipročnu vrednost konstante radioaktivnog raspada.

20.6 Aktivnost radioaktivnog izvora

Konstanta radioaktivnog raspada λ predstavlja verovatnoću raspada jednog jezgra u jednoj sekundi. Prema tome, verovatnoća raspada N atoma za isto vreme može se izraziti na sledeći način:

$$A = \lambda N = -\frac{dN}{dt}. \tag{20.18}$$

Iz ovog izraza sledi da veličina A predstavlja brzinu raspada nekog radioaktivnog izvora i naziva se aktivnost.

Ako je početna aktivnost nekog radioaktivnog izvora A_o, a aktivnost posle nekog vremena t, A_t, tada je

$$A_t = \lambda N_t = \lambda N_o \exp(-\lambda t) = A_o \exp(-\lambda t). \tag{20.19}$$

Izraz (20.19) pokazuje da aktivnost radioaktivnog izvora opada sa vremenom po istom (eksponencijalnom) zakonu po kome opada broj radioaktivnih jezgara.

Jedinica za aktivnost je bekerel (Bq) i predstavlja jedan raspad u sekundi.

Za karakterisanje aktivnosti neke mase radioaktivnog izvora koristi se valičina koja se naziva specifična aktivnost i jednaka je odnosu aktivnosti i njegove mase. Specifična aktivnost se izražava u bekerelima po kilogramu (Bq/kg).

20.7 Radioaktivna ravnoteža

Kao što je već ranije navedeno, jezgra radioaktivnog elementa se raspadaju uz emisiju alfa, beta ili gama-zračenja. Jezgra novonastalog elementa (jezgra elementa potomka) mogu da budu stabilna ili radioaktivna. U slučaju da su jezgra potomka radioaktivna i da se raspadaju brzinom sa kojom se raspadaju jezgra polaznog elementa dolazi do radioaktivne ravnoteže. Prema jednačini (20.10) brzina raspada jezgra polaznog elementa (jezgra elementa pretka), koji je označen indeksom 1, jednaka je $\lambda_1 N_1$, pri čemu je N_1 broj jezgara elementa pretka, a λ_1 njegova konstanta radioaktivnog raspada. Ako svako jezgro elementa pretka raspadom proizvede jedno jezgro elementa potomka onda se takodje može govoriti o brzini stavaranja potomka iz njegovog polaznog elementa. Brzina raspada elementa-potomka je $\lambda_2 N_2$, gde je N_2 broj jezgara potomka, a λ_2 njegova konstanta radioaktivnog raspada. Kada nastupi ravnoteža, brzina stvaranja potomka iz njegovog pretka elementa biće jednaka brzini njegovog raspada, tj.

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2. \tag{20.20}$$

Pošto se element-potomak takodje raspada, to on predstavlja element novog potomka 3 tako da, kada je postignuta ravnoteža, postoji zavisnost koja je potpuno analogna jednačini (20.20), tj.

$$\lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3. \tag{20.21}$$

Iz ovih razmatranja proizilazi da postoji niz uzastopnih raspada pri čemu je opšti uslov za ravnotežu dat izrazom:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \lambda_4 N_4 = ..., \tag{20.22}$$

gde su N_1, N_2, N_3,... brojevi jezgara radioaktivnog elementa 1,2,3,..., koji se nalaze u radioaktivnoj ravnoteži, a λ_1, λ_2, λ_3,... su njihove odgovarajuće konstante radioaktivnog raspada. Prema tome, za ma koja dva člana A i B radioaktivnog niza, bez obzira na to da li su predak ili potomak, ili ih nekoliko generacija odvaja, važi jednakost

$$\lambda_A N_A = \lambda_B N_B. \tag{20.23}$$

Jednačina (20.23) može se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = const. \tag{20.24}$$

Pošto su λ_A i λ_B konstante, to je količnik λ_B/λ_A takodje konstanta, pa je stoga konstantna vrednost količnika ma koja dva člana koji se raspadaju u procesu radioaktivne ravnoteže.

Zakon radioaktivne ravnoteže naveo je Raderforda i Sodija (Soddy) 1903. godine na predpostavku da je i sam radijum proizvod raspada nekog drugog elementa. Raderford je 1904. godine izneo tvrdnju da bi radijum mogao biti potomak urana pošto se uvek nalazi u uranovim mineralima. On je konstatovao da bi, ako bi to bio slučaj, odnos broja jezgara urana prema broju jezgara radijuma u ovim mineralima morao, prema jednačini (20.24), da bude konstantan. Ovu pretpostavku su dokazali Boltvud (Boltwood). Mek Kaj (McCay) i Strat (Strat), tj. pokazali su da su uran i radijum članovi istog dezintegracionog niza. Danas je poznato da svi minerali urana sadrže odredjeni deo radijuma.

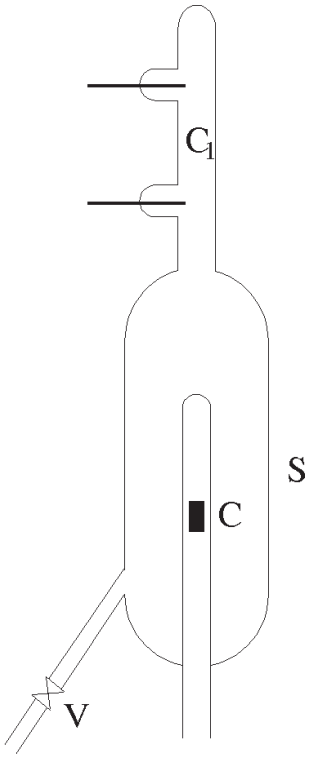
20.8 Alfa-čestice

Za objašnjenje prirode alfa-čestica (alfa-zračenja) Raderfordu je poslužio sledeći eksperiment (sl. 20.8). U staklenoj cevčici C tankih zidova, smeštenoj u stakleni sud S u kome vlada visok vakuum, nalazi se radioaktivni radon $^{222}_{86}$Rn. Čestice koje emituje radon pri radioaktivnom raspadu prolaze kroz staklenu cevčicu C pri čemu ih apsprbuje zid suda S. Potom se ovaj zid zagreva pri čemu dolazi do desorpcije gasa iz njegovog zida. Ovaj gas se pomoću žive, koja se upušta preko ventila V, sabija u cevčicu C_1 u kojoj su smeštene dve elektrode. Na elektrode se dovodi napon koji izaziva pražnjenje gasa. Analizom spektra svetlosti ovog pražnjenja Raderford je ustanovio da je on isti kao spektar helijuma.

Pomoću ovog eksperimenta je ustanovljeno da radon emituje jezgra helijuma $^4_2$He koja se nazivaju alfa-čestice. One prolaze kroz cevčicu C pri čemu ih adsorbuje zid S od koga primaju dva elektrona i pod uticajem temperature se desorbuju atomi helijuma.

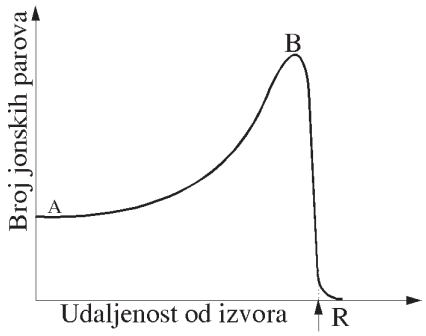
Brzina kojom alfa-čestice napuštaju jezgra iznosi približno $10^7\, ms^{-1}$. To znači da je kinetička energija reda megaelektronvolta. Krećući se kroz materijal alfa-čestice troše svoju energiju na jonizaciju atoma ili molekula tog materijala i na kraju se zaustavljaju. Za obrazovanje jednog jonskog para u vazduhu alfa-čestica utroši energiju oko $35\, eV$, iz čega proizilazi da ona na svom putu stvori oko 10^5 jonskih parova. Sa povećanjem gustine materijala dužina puta alfa-čestica se smanjuje. U vazduhu na atmosferskom pritisku dužina njihovog puta je nekoliko centimetara, a u čvrstim telima oko $10^{-3}\, cm$.

Prve podatke o dometu alfa-čestica kroz vazduh saopštio je Brag 1904. godine. On je pomoću jonizacione komore posmatrao broj jonskih parova koje alfa čestica stvori na jedinici puta (specifična jonizacija) u vazduhu pri atmosferskom pritisku na raznim odstojanjima od izvora. Kada se ove vrednosti prenesu na dijagram dobija se kriva linija kao na slici 20.9 koja se naziva Bragova kriva. Iako podaci variraju u zavisnosti od prirode radioaktivnih elemenata koji emituju alfa-čestice, oblik krive je isti. Sa slike se vidi da sa porastom rastojanja alfa-čestica od njihovog izvora raste broj jonskih parova stvorenih na jedinici dužine puta, u početku lagano, dostiže maksimum, a potom naglo pada. Rastojanje koje odgovara tački R predstavlja (ekstrapolirani) domet alfa-čestica datog radioaktivnog izvora. Ovakvo ponašanje Bragove krive može se objasniti na sledeći način. Pri kretanju kroz materijal alfa-čestica na svom putu gubi energiju usled stvaranja jonskih parova što utiče na smanjenje njene brzine. Pošto se



Sl. 20.8: Šema aparature za identifikaciju alfa-čestica

alfa-čestica sve sporije kreće, vreme boravka u blizini molekula materijala se povećava, usled čega se povećava verovatnoća za odstranivanje elektrona iz ovog molekula i obrazovanje jonskog para. Na taj način stalno raste broj jonskih parova (deo krive od A do B). Najzad, alfa-čestica stiže do rastojanja kada se elektroni vezuju za nju i pretvaraju se u neutralni atom, koji više ne može da vrši jonizaciju vazduha, zbog čega specifična jonizacija naglo opada.

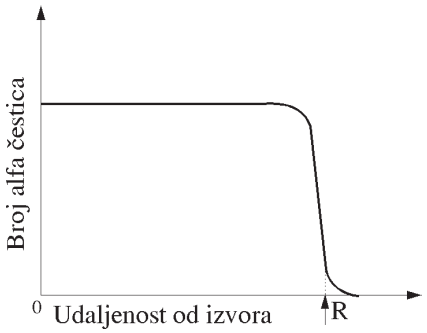


Sl. 20.9: Oblik Bragove krive

Sa slike se vidi da završni deo krive nije strm, već ima jedan eksponencijalni deo. Razlog tome je što sve alfa-čestice prilikom susreta sa molekulima ne gube istu količinu energije. Zbog toga one ne prestaju da vrše jonizaciju na potpuno jednakim rastojanjima od izvora. Ova mala razlika u dometu često se naziva razvlačenje i delom je posledica obrazovanja He^+ jona koji nastaju vezivanjem jednog elektrona za neku alfa-česticu. Ovi joni su još uvek sposobni za jonizaciju što utiče na malo povećanje dometa pre nego što prime drugi elektron i postanu neutralni atomi.

Druga metoda za ispitivanje dometa alfa-čestica sastoji se u odredjivanju njihovog broja na raznim odstojanjima od izvora. Za ovo brojenje može se upotrebiti, na primer, jonizaciona komora ili scintilacioni brojač. Zavisnost broja alfa-čestica od rastojanja od izvora prikazana je na slici 20.10. Sa slike se vidi da njihov broj ostaje uglavnom konstantan do izvesnog odstojanja, a potom oštro pada na nulu ako se zanemari malo razvlačenje dometa.

Nadjeno je da izmedju dometa alfa-čestica i brzine v (energije E) sa kojom ona napušta jezgro postoji



Sl. 20.10: Broj alfa-čestica u funkciji rastojanja od radioaktivnog izvora

sledeća zavisnost:

$$R = Av^3 = A_1 E^{3/2}, \tag{20.25}$$

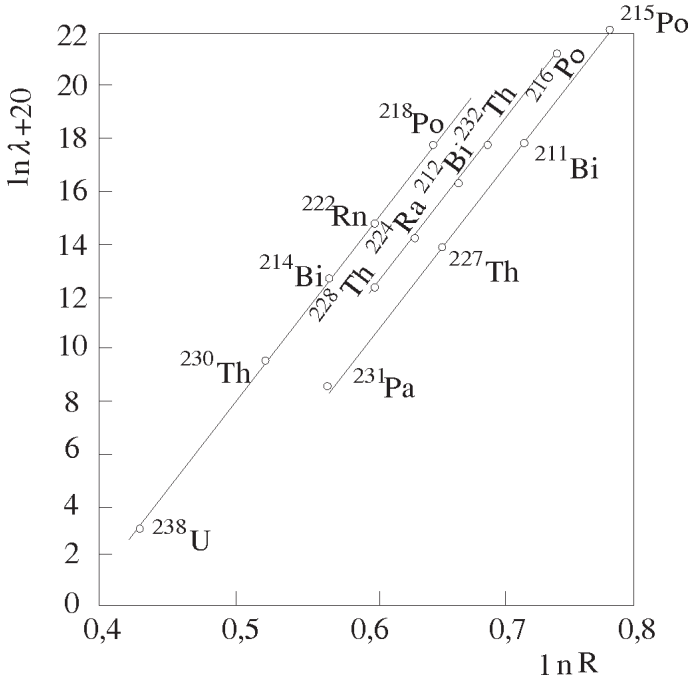
gde su A i A_1 konstante.

Gajger (Geiger) i Nutal (Nuttall) su došli do funkcionalne zavisnosti izmedju konstante radioaktivnog raspada λ i dometa alfa-čestica, koja se može izraziti na sledeći način:

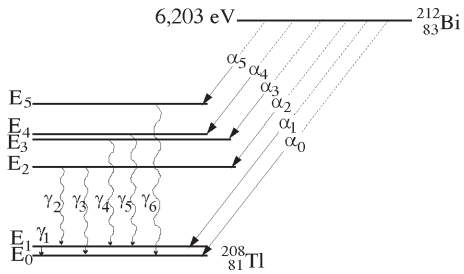
$$\ln \lambda = B + C \ln R, \tag{20.26}$$

gde su B i C konstante. Izraz (20.26) naziva se Gajger-Nutalovo pravilo. Na slici 20.11 data je zavisnost konstante radiaoaktivnog raspada od dometa alfa-čestica za neke elemente.

U početku razvoja nuklearne fizike smatralo se da alfa-čestice, emitovane iz nekog jezgra, imaju iste energije. Kasnija istraživanja su pokazala da pojedina jezgra mogu emitovati nekoliko grupa ovih čestica sa različitim vrednostima enegije. Na slici 20.12 prikazana je energetska raspodela alfa-čestica (pojava fine strukture alfa-čestica) koje se mogu emitovati pri raspadu jezgra bizmuta $^{212}_{83}$Bi. Na levoj strani šeme prikazani su energetski nivoi jezgra potomka talijuma $^{208}_{81}$Tl. Naime, novonastalo jezgro $^{208}_{81}$Tl posle emisije alfa-čestice iz $^{212}_{83}$Bi može da se nadje u osnovnom E_o ili jednom od pobudjenih stanja E_1, E_2, E_3, E_4 i E_5. Ono nastoji da se oslobodi viška unutrašnje energije i to čini emisijom gama-kvanta. Energija emitovanog gama-kvanta zavisi od energetskog nivoa na kojem je pobudjeno jezgro $^{208}_{81}$Tl.



Sl. 20.11: Zavisnost konstante radioaktivnog raspada od dometa alfa-čestice za neke elemente



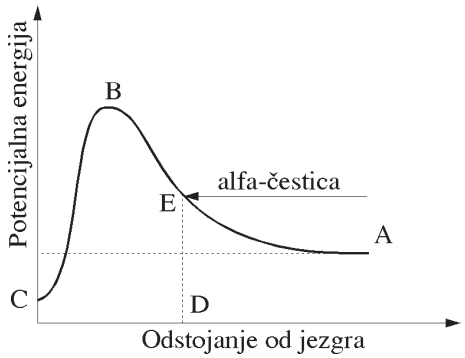
Sl. 20.12: Emisija alfa-čestica iz bizmuta

Postojanje šest grupa alfa-čestica koje emituje bizmut $^{212}_{83}$Bi kao i vrednosti njihovih energija odredjene su pomoću fotoosetljivog materijala koji je postavljen u uredjaj sličan masenom spektrometru. Na taj način ustanovljen je linijski spektar alfa-čestica.

Srednje vreme života τ pobudjenog stanja za većinu jezgara kreće se od 10^{-15} do $10^{-13}\,s$. Za ovo vreme jezgro ptomak prelazi u niže pobudjeno ili osnovno stanje pri čemu se emituje gama-kvant. Na slici 20.12 prikazano je šest gama-kvanata sa različitim energijama koje može da emituje talijum zavisno od energetskog nivoa na kome se nadje posle emisije alfa-čestice.

Pobudjeno jezgro potomka može se osloboditi viška energije i emisijom jedne od čestica kao što su proton, neutron, elektron ili alfa-čestica. Pobudjeno jezgro, nastalo emisijom alfa-čestice, može višak energije predati bez emisije gama-kvanta, jednom od elektrona na K, L ili M nivo pri čemu elektron napušta atom. Ovaj proces naziva se unutrašnja konverzija. Upražnjeno (vakantno) mesto elektrona na datom nivou se popunjava elektronom sa viših nivoa. Prema tome, unutrašnja konverzija je uvek praćena emisijom karakterističnog rendgenskog zračenja.

Eksperimenti sa rasejavanjem alfa-čestica pri prolasku kroz tanke metalne folije pokazali su da atomsko jezgro odbija čak i najbrže alfa-čestice. Medjutim, ukoliko neka alfa-čestica ima veću energiju, utoliko ona može da se više približi jezgru, pre nego što bude odbijena. Ovaj zaključak važi za sva jezgra, uključujući tu i jezgra radioaktivnih elemenata. Iako odbijanje sprečava alfa-čestice da prodru u jezgro, poznato je da radioaktivna jezgra emituju alfa čestice. To znači da se one, makar za kratko vreme moraju da nadju u unutrašnjosti jezgra. Uzajamno dejstvo izmedju radiaoaktivnog jezgra i alfa-čestice, kako izvan, tako i u unutrašnjosti jezgra, može se grafički prikazati krivom potencijalne energije date na slici 20.13. Deo krive AB ukazuje na sve veće odbijanje alfa-čestica ukoliko se ona približava jezgru. Nagli pad ove krive u intervalu od B do C, koji predstavlja oblast u unutrašnjosti jezgra, podrazumeva privlačenje alfa-čestica od strane nukleona u jezgru.



Sl. 20.13: Potencijalna barijera jezgra

Računskim putem je utvrdjeno da tačka B na krivoj (sl. 20.13) odgovara energiji od oko $25\,MeV$ kod elemenata sa velikom vrednošću atomskog broja Z. Prema tome, alfa-čestice, čija je energija manja od ovog iznosa, biće odbijena kada se približi jezgru spolja. Najbrže alfa-čestice imaju energiju oko $10\,MeV$. Kada se i ovako brze alfa-čestice približe jezgru biće odbijene sa rastijanja od centra jezgra koje odgovara tački D. Da bi alfa-čestica prodrla u jezgro, potrebna je energija od najmanje $25\,MeV$.

Kriva na slici 20.13 naziva se potencijalna barijera jezgra. Oblik potencijalne barijere varira u zavisnosti od prirode čestice koja se približava jezgru. Tako, na primer, ako je čestica proton barijera je veoma mala, čak izmedju jezgra i neutrona praktično ne postoji nikakvo odbijanje.

Ako alfa-čestica treba da ima energiju od najmanje $25\,MeV$ (tačka B na sl. 20.13) da bi prodrla u jezgro, trebalo bi da ima istu toliku energiju da bi napustila jezgro. Medjutim, radioaktivna jezgra emituju alfa-čestice čija je najveća energija oko $10\,MeV$. Ova pojava se ne može objasniti zakonima klasične fizike, po kojima alfa-čestice ne bi mogle da napuste jezgro pošto je njihova energija manja od energije potencijalne barijere. Ova pojava se uspešno objašnjava u kvantnoj mehanici tunel-efektom. U kvantnoj mehanici verovatnoća da alfa-čestica napusti jezgro je utoliko veća ukoliko je energija alfa-čestice veća.

Nadjeno je da radioaktivni elementi koji se brzo raspadaju emituju alfa-čestice velike energuije i velikog dometa, dok elementi čije je vreme života duže emituju alfa-čestice sa relativno malom energijom i kratkim dometom, kao što pokazuje tabela 20.1.

Tabela 20.1: Domet i vreme emisije alfa-čestice

Radioaktivni element	Domet (cm)	Vreme emisije alfa-čestice
$^{232}_{90}Th$	2,8	$1,39.10^{10}\,god.$
$^{226}_{88}Ra$	3,3	$1620\,god.$
$^{228}_{90}Th$	3.9	$1,9\,god.$
$^{218}_{84}Po$	4,6	$3,0\,min$
$^{216}_{84}Po$	5,6	$0,16\,min$
$^{214}_{84}Po$	6,9	$1,6.10^{-4}\,s$
$^{212}_{84}Po$	8,6	$3.10^{-7}\,s$

Interesantno je razmotriti verovatnoću oslobadjanja alfa-čestice iz jezgra i njenog ponovnog vraćanja u jezgro. Poznato je da poluprečnik jezgra iznosi oko $10^{-12}\,cm$, dok je brzina alfa-čestice koja se kreće u jezgru oko $10^8\,cms^{-1}$. Prema tome, alfa-čestica će se naći na spoljašnjoj površini približno $10^8/10^{-12} = 10^{20}$ puta u sekundi. Kada se ova frekvencija pomnoži sa verovatnoćom oslobadjanja, dobija se kao rezultat konstanta radioaktivnog raspada λ u jedinicama s^{-1}. Vrednost za λ, u zavisnosti od vrste radioaktivnog izvora kreće se od 10^7 do $10^{-18}\,s^{-1}$. To znači da čak kod polonijuma, u čijem se jezgru alfa-čestica, energije oko $9\,MeV$, vrlo malo zadržava, ona mora prosečno da izvrši 10^{13} pokušaja pre nego što uspe da napusti jezgro. Kod torijuma čija je energija alfa-čestice $4\,MeV$ uspeva da napusti jezgro posle 10^{38} pokušaja. Kad se jezgro bombarduje alfa-česticama, broj pokušaja je tehnički mnogo manji i zato efekat nije izražen, iako je verovatnoća za ulazak u jezgro ista kao ona za emisiju iz jezgra pod pretpostavkom da postoji ista vrednost energije u oba slučaja.

Emisija alfa-čestice iz jezgra (alfa-raspad) vrši se po sledećaoj šemi:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A-4}_{Z-2}Y + ^{4}_{2}He, \tag{20.27}$$

gde slovo X označava hemijski simbol jezgra pre emisije alfa-čestice (jezgro predak), a Y hemijski simbol novoobrazovanog jezgra (jezgro potomak) posle emisije alfa-čestice. Alfa-raspad je obično praćen emisijom gama-kvanta od strane jezgra potomka. Iz šeme se vidi da se emisijom alfa-čestice atomski broj jezgra potomka smanji za 2, a maseni za 4.

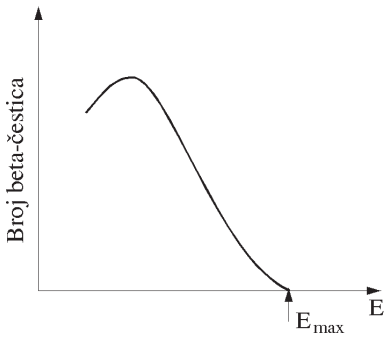
20.9 Beta-čestice

Beta-čestice (beta-zračenje) čini snop elektrona (β^--čestice) ili pozitrona (β^+-čestice). Ove dve čestice naelektrisane su istom količinom naelektrisanja suprotnog znaka. One se razlikuju po vremenu života. Dok elektroni mogu da bude slobodni neograničeno dugo, vreme života pozitrona je reda nanosekunde. Pozitron zahvata elektron pri čemu nastaju dva gama-kvanta energije od po $0,51\,MeV$. Ovaj proces naziva se anihilacija i može da posluži za detekciju pozitrona.

Prvu indetifikaciju beta-čestica izvršio je Bekerel posmatranjem njihovog skretanja u magnetnom polju. Primetio je da one obrazuju kontinualnu raspodelu brzina, a samim tim i energija. Rezultati

do kojih su došli Han (Hahn), Šmit i Majtner (Meitner) pokazala su da su beta-čestice, slično alfa-česticama, monoenergetske prirode. Kasnije je Čedvik (Chadwick) ustanovio da najveći deo ovih čestica ima kontinualni spektar, a da jedan mali deo čini grupe monoenergetskih beta-čestica, tj. ima linijski spektar.

Pri beta raspadu kinetička energija elektrona ili pozitrona može imati vrednosti od nule do neke maksimalne vrednosti E_{max}. Spektar ovih čestica je sličan za većinu radioaktivnih elemenata i prikazan je na slici 20.14. U tabeli 20.2 date su maksimalne energije i vremena poluraspada za neka beta radioaktivna jezgra.



Sl. 20.14: Opšti oblik raspodele beta-čestica po energijama (spektar beta-čestica)

Tabela 20.2: Tip raspada (β^- ili β^+), maksimalna energija E_{max} (u MeV) i vreme pluraspada (T) za neka beta radioaktivna jezgra

Jezgro	Tip	E_{max}	T	Jezgro	Tip	E_{max}	T
${}^{1}_{0}n$	β^-	0,78	$11,7\,s$	${}^{45}_{20}Ca$	β^-	0,254	$152\,dana$
${}^{3}_{1}H$	β^-	0,0186	$12,46\,god.$	${}^{114}_{49}Jn$	β^-	1,98	$72\,s$
${}^{6}_{2}He$	β^-	3,215	$0,823\,s$	${}^{37}_{16}S$	β^-	4,3	$5,04\,min$
${}^{11}_{6}C$	β^+	0,96	$20,5\,min$	${}^{91}_{39}Y$	β^-	1,53	$57\,s$
${}^{14}_{8}O$	β^+	1,823	$72,1\,s$	${}^{210}_{83}Bi$	β^-	1,170	$5\,dana$
${}^{23}_{12}Mg$	β^+	2,82	$11,6\,s$	${}^{10}_{4}B$	β^-	0,555	$2,7.10^6\,god.$
${}^{26}_{13}Al$	β^+	3,218	$6,36\,s$	${}^{36}_{17}Cl$	β^-	0,713	$4,4.10^5\,god.$
${}^{34}_{17}Cl$	β^+	4,495	$1,54\,s$	${}^{40}_{19}K$	β^-	1,1	$1,32.10^9\,god.$
${}^{35}_{16}Si$	β^-	0,167	$87,1\,dan$	${}^{187}_{75}Re$	β^-	0,043	$2.10^{12}\,god.$

Kriva raspodele beta-čestica po energijama za većinu radioaktivnih elemenata ima maksimum približno pri $E = E_{max}/3$.

Kontinualna raspodela energije većine beta-čestica je zbunila mnoge naučnike. Naime, ispitivanjem alfa-čestica i uzroka emisije gama zračenja došlo se do zaključka da postoje odredjena energetska stanja jezgra. Pošto i jezgro predak i jezgro potomak imaju tačno odredjenu unutrašnju energiju postavlja se pitanje kako je moguće da beta-čestice imaju različite vrednosti energije. Druga poteškoća u objašnjenju kontinualnog spektra je pitanje kako se mogu iz jezgra emitovati elektroni (pozitroni) kada se ono sastoji samo iz protona i neutrona.

Izlaz iz ove poteškoće našao je Pauli. Prema Paulijevoj hipotezi, uporedo sa emisijom beta-čestice, nastaje emisija još jedne čestice koju je nazvao neutrino. Ova hipotetička čestica nije naelektrisana i masa joj je za oko četiri reda veličine manja od mase elektrona. Pri beta raspadu neutrino sa sobom nosi razliku izmedju maksimalne energije i one koju ima beta-čestica.

Raspodela energije izmedju beta-čestice i neutrina ima statistički karakter. Nekada u jednom aktu raspada veći deo energije nosi beta-čestica, a nekada neutrino. Vrlo retko svu energiju nosi beta-čestica. Takodje postoje i takvi slučajevi kada svu ili skoro svu energiju nosi neutrino, ali su oni veoma retki. Prvi slučaj odgovara maksimumu energije na slici 20.14, a drugi blizini koordinatnog početka iste krive. Treba istaći da je raspodela izmedju elektrona i neutrina u dobroj saglasnosti sa kontinualnim spektrom beta-čestica.

Hipoteza o emisiji neutrina pri beta raspadu ne objašnjava samo teškoću u vezi kontinualne raspodele beta-čestica, već i teškoću o očuvanju spina. Naime, beta čestice imaju spin jednak $\hbar/2$. Spontano emitovani neutrino ima takodje spin jenak $\hbar/2$, te se zato ukupni moment impulsa menja za 1 ili 0. Time je u potpunosti zadovoljen i zakon očuvanja spina koji prema kvantnoj teoriji može da se menja samo za ceo broj.

Nakon teorijskih postavki o postojanju neutrina pokušano je da se ova čestica detektuje. Medjutim, pošto neutrino ima veoma malu masu a nije naelektrisan, lako prolazi kroz materijal, a da pri tome ne vrši nikakvu jonizaciju. Zato ga je veoma teško detektovati.

Najpre su Elis (Ellis) i Vuster (Wooster) na osnovu oslobodjene količine toplote pri prolazu beta-čestice kroz kalorimetar uspeli da odrede prisustvo neutrina, odnosno njegovu energiju. Zato je Šervin (Shervin) analizirao uzmak jezgara pri beta raspadu, te je posrednim putem uspeo da odredi masu neutrina i njegov spin.

Fermi je razvio teoriju o dvema česticama, neutrinu i antineutrinu po kojoj se ove dve čestice medjusobno odnose kao elektron i pozitron, gde je antineutrino antičestica neutrina.

Prema Fermijevoj teoriji jezgra koja sadrže veći broj neutrona od protrebnog da bi bila stabilna transformišu se po sledećoj šemi:

$$ {}^{1}_{o}n \rightarrow {}^{1}_{1}\, p + \beta^{-} + {}^{o}_{o}\,\tilde{\nu}, \tag{20.28} $$

tj. nastaje emisija elektrona (β^{-} čestice često se obeležava kao ${}^{o}_{-1}e$) i antineutrino ${}^{o}_{o}\tilde{\nu}$. Opšta formula po kojoj se vrši elektronski raspad jezgra može da se prikaže u sledećem obliku:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\, Y + \beta^{-} + {}^{o}_{o}\,\tilde{\nu}. \tag{20.29} $$

Ako jezgro ima višak protona, dolazi do emisije β^{+}-čestice (obeležava se ${}^{o}_{+1}e$) i neutrina ${}^{o}_{o}\nu$, tj.

$$ {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{o}\, n + \beta^{+} + {}^{o}_{o}\,\nu. \tag{20.30} $$

Opšta formula po kojoj se vrši pozitronski raspad je

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\, Y + \beta^{+} + {}^{o}_{o}\,\nu. \tag{20.31} $$

Postojanje slobodnog neutrina potvrdili su Reins (Reines) i Kauen (Cawan) sa saradnicima. Oni su pomoću fluksa antinutrina, koji je dobijen u reaktoru, bombardovali protone pri čenu su dobijeni neutroni i pozitroni koje je moguće detektovati

$$ {}^{o}_{o}\tilde{\nu} + {}^{1}_{1}\, p \rightarrow {}^{1}_{o}\, n + \beta^{+}. \tag{20.32} $$

Na taj način je eksperimentalno dokazano postojanje slobodnih antineutrina.

Pri beta raspadu potomak se može naći u jednom od pobudjenih stanja. Prelaskom iz pobudjenog u osnovno stanje emituje se gama-kvant. Prema tome, emisija beta-čestice je praćena emisijom gama-kvanta, pa je ukupna energija trnsmutacije jezgra raspodeljena na elektron (ili pozitron), antineutrino (ili neutrino) i gama-kvant.

Kod nekih prirodno radioaktivnih elemenata nastaje sukcesivni β^{-}-raspad, kao na primer

$$ {}^{136}_{51}Sb \rightarrow {}^{136}_{52}\, Te \rightarrow {}^{136}_{53}\, J \rightarrow {}^{136}_{54}\, Xe... \tag{20.33} $$

U nekim slučajevima beta-raspada javlja se emisija zračenja sa grananjem. Naime, jedan deo prelaza se vrši u osnovno stanje, a drugi u jedno ili više ekscitiranih stanja. Tako, na primer, kod ${}^{35}_{17}$Cl uočavaju se tri beta-čestice, alternativno sa energijama E_{max} od 1,11 (31%), 2,73 (16%) i $4,81\,MeV$ (53%) i dva gama-kvanta sa energijama od $1,60\,MeV$ i $2,15\,MeV$. Ovakav oblik raspada naziva se složeni beta raspad.

Linijski spektar beta-čestice potiče od sekundarne emisije elektrona koja je poznata pod nazivom unutrašnji preobražaj ili unutrašnja konverzija. Naime, Raderford je pretpostavio da gama-kvant prilikom napuštanja jezgra može da proizvede neku vrstu fotoefekta sa jednim od elektriona na orbitama istog atoma pri čemu mu predaje celokupnu energiju. Taj elektron biva izbačen iz atoma. Pošto gama-kvanti

emitovani pri radioaktivnom raspadu imaju velike energije, to i elektroni koji se oslobode pri udaru ovih kvanata takodje imaju velike energuje i ponašaju se kao β^--čestice (obrazuju linijski spektar beta čestica). Pokazano je da samo mali broj gama-kvanata oslobadja sekundarne elektrone iz atomskog omotača. Verovatnoća za ovu pojavu se smanjuje sa smanjenjem energije gama-kvanta.

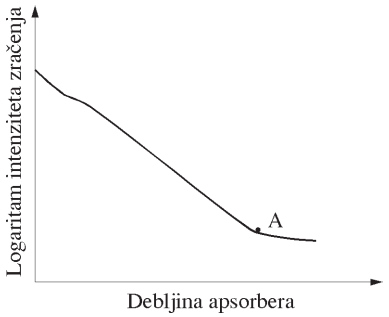
Beta-čestice na svom putu vrše jonizaciju oko 10^2 puta manje po jedinici dužine puta (specifična jonizacija) od alfa-čestica. Efikasnost jonizacije beta-česticama zavisi od njihove energije. Ukoliko je njihova energija veća utoliko je specifična jonizacija manja. Maksimalnu jonizaciju vrši beta čestica energije od $1\,keV$ pri čemu se obrazuje oko 10^3 jonskih parova na putu dužine od $1\,cm$ u vazduhu na atmosferskom pritisku. Ukoliko su energije ovih čestica veće utoliko je jonizacija manja.

Apsorpcija beta-čestica vrši se po veoma složenom zakonu, jer se one pri prolazu kroz neki materijal rasejavaju u znatno većoj meri od alfa-čestica. Zbog svoje male mase one skreću sa prvobitnog pravca za uglove koji su ponekad veći od 90^o. Ova pojava poznata je pod nazivom difuzno rasipanje.

Domet beta-čestice veoma malo zavisi od prirode sredine kroz koju prolaze. Medjutim, domet beta-čestica zavisi od mase jedinične normalne površine sloja kroz koji one prolaze.

Pošto beta-čestice pri prolazu kroz neku sredinu vrše jonizaciju atoma ili molekula te sredine, njihova energija se smanjuje i posle izvesnog predjenog puta se zaustavljaju, tj. bivaju apsorbovane. Eksperimenti pokazuju da putanje beta-čestica nisu prave linije.

Apsorpcija beta-čestica, a time i njihov domet kroz neki materijal može se odrediti na sledeći način. Izvor beta-čestica najpre se postavi u odredjeni polažaj, a na nekom rastojanju izmeri se njihov intenzitet nekim brojačem. Broj impulsa koji detektuje brojač proporcionalan je intenzitetu beta-zraka. Zatim se izmedju izvora i brojača, normalno na pravac beta-zraka, postavi pločica od materijala odredjene debljine za koji želi da se ispita njihov domet. Brojačem se izmeri intenzitet beta-čestica koje su prošle kroz datu pločicu. Potom se postavi još jedna pločica i ponovi merenje. Umetanjem novih pločica od istog materijala dobijaju se različite vrednosti intenziteta. Kada se nacrta grafik logaritma intenziteta za razne debljine materijala kroz koje prolaze beta-čestice kao rezultat se dobija približno prava linija do tačke A na slici 20.15 koja predstavlja kraj dometa beta-čestica. Sa slike se vidi da posle neke debljine materijala intenzitet beta-čestica ne pada na nulu već zadržava konstantnu vrednost. Zadržavanje njihovog konstantnog intenziteta po prolasku kroz materijal odredjene debljine je posledica dve pojave. Naime, prodorno zračenje, koje je analogno kontinualnom spektru rendgenskog zračenja, a posledica je naglog usporavanja beta-čestica velike brzine usled njihove apsorpcije, može osloboditi sekundarne elektrone koji vrše jonizaciju. Osim toga, beta emisija je skoro uvek praćena gama-zračnejem koje se znatno slabije apsorbuje u materijalu. Apsorpcijom gama-kvanta nastaje fotoefekat i oslobodjeni elektroni imaju veliku energiju. Ovi elektroni vrše jonizaciju u materijalu što utiče na održavanje odredjenog intenziteta zračenja.

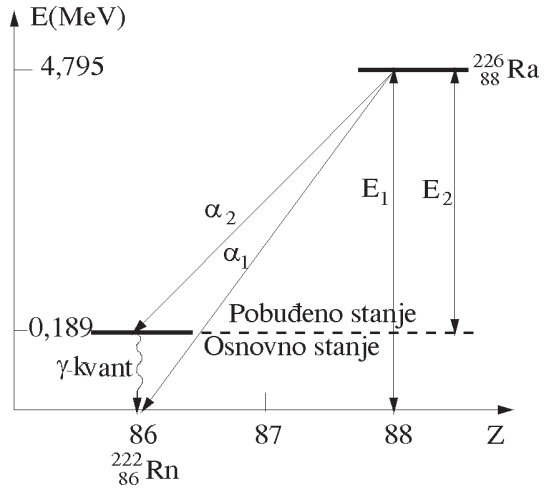


Sl. 20.15: Apsorpcija beta-čestica u materijalu

20.10 Gama-zračenje

Eksperimentalno je pokazano da se gama-zračenje ne javlja kao samostalni oblik zračenja, već prati emisiju alfa ili beta-čestica, a takodje se pojavljuje i pri nuklearnim reakcijama. Gama zračenje je elektromagnetne prirode i njegov spektar je linijski. Takav spektar gama-zračenja predstavlja jedan od najvažnijih dokaza postojanja diskretnih energetskih stanja atomskog jezgra.

Utvrdjeno je da gama-zračenje emituje jezgro potomak, a ne jezgro predak. Jezgro potomak u mometu svog obrazovanja posle emisije alfa ili beta-čestice iz jezgra pretka ostaje u pobudjenom stanju za vreme od 10^{-14} do $10^{-13}\,s$. Posle ovog vremena jezgro prelazi u osnovno stanje, pri čemu se emituje gama-kvant. Na slici 20.16 šematski je prikazan proces radioaktivnog raspada jezgra $^{226}_{88}$Ra, pri kome dolazi do emisije gama kvanta. Jezgro $^{226}_{88}$Ra prilikom radioaktivnog raspada emituje dve alfa-čestice alternativno sa energijama $E_1 = 4,795\,MeV$ i $E_2 = 4,610\,MeV$. Novonastalo jezgro radona $^{222}_{86}$Rn može da se nadje u pobudjenom ili osnovnom stanju. Na slici je za nulti energetski nivo uzeto osnovno stanje radona. Nakon emisije alfa-čestice manje energije (označene na slici sa α_2) radon ostaje u pobudjenom stanju na energetskom nivou od $0,189\,MeV$, sa koga emisijom gama-kvanta prelazi u osnovno stanje.



Sl. 20.16: Emisija gama-kvanta prilikom radioaktivnog raspada $^{226}_{88}$Ra

Pobudjena jezgra nekih radioaktivnih elemenata pri vraćanju u osnovno stanje mogu preći kroz niz pobudjenih stanja. Prema tome, gama-zračenje jednog istog radioaktivnog elementa može da sadrži nekoliko gama-kvanata koji se medjusobno razlikuju po energijama.

Pošto gama-kvanti ne poseduju masu u miru ne može se izvršiti njihovo usporavanje u sredini kroz koju prolaze. Prema tome, pri prolazu gama zraka kroz neki materijal dolazi do njihove apsorpcije i rasejavanja što utiče na smanjenje njihovog intenziteta. Smanjenje intenziteta vrši se po istom zakonu po kome se smanjuje intenzitet rendgenskog zračenja pri prolazu kroz neki materijal (izraz 4.26), tj.

$$I = I_o \exp(-\mu d), \tag{20.34}$$

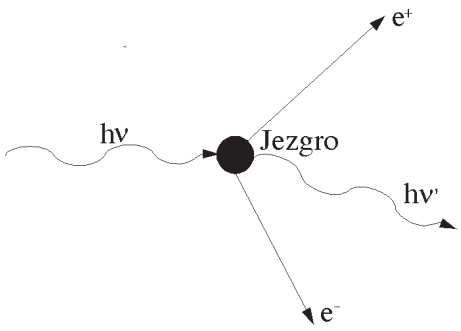
gde je I_o intenzitet gama zraka iz datog izvora pre prolaska kroz materijal, I intenzitet posle prolaska kroz materijal debljine d i μ linearni koeficijent apsorpcije.

Pokazano je da su osnovni procesi koji nastaju pri interakciji gama-zračenja sa materijalom, fotoelektrični efekat, Komptonov efekat i stvaranje elektron-pozitronskog para.

Fotoelektični efekat ili fotoelektrična apsorpcija gama-zračenja je proces pri kome atom apsorbuje gama-kvant, a potom emituje elektron. U ovom slučaju gama-kvant celokupnu energiju predaje elektronu. Pošto se elektron oslobadja sa jednog od unutrašnjih energetskih nivoa atoma to upražnjeno mesto se popunjava elektronom sa viših elektronskih nivoa što uslovljava pojavu karakterističnog rendgenskog zračenja. Fotoelektrični efekat je dominantan mehanizam emisije u oblasti malih energija gama-kvanta ($h\nu < 100\,keV$). Verovatnoća za pojavu fotoelektričnog efekta je veća kod materijala sa većim atomskim brojem Z. Sa povećanjem vrednosti Z apsorpcija brzo raste i proporcionalana je sa Z^3.

Kada je energija gama-kvanta veća od $500\,keV$ dolazi do Komptonovog efekta. U tom slučaju elektron napušta atom, a foton menja pravac kretanja i ima manju energiju.

Kada je energija fotona gama-zračenja $h\nu$ veća od $1,02\,MeV$ moguće je da se obrazuje par elektron-pozitron. Naime, pri susretu takvog fotona sa teškim jezgrom on prelazi u par elektron-pozitron trošeći energiju od $1,02\,MeV$. Ostatak energije fotona se javlja u vidu kinetičke energije elektrona i pozitrona. Takodje je moguća i pojava rasejanog kvanta $h\nu'$ (sl. 20.17).



Sl. 20.17: Obrazovanje elektron-pozitronskog para pri rasejanju fotona

Obrazovanje elektrona i pozitrona može se pratiti pomoću Vilsonove komore sa magnetnim poljem normalnim na ravan crteža. Tragovi ovih čestica u komori počinju u istoj tački, a potom se razilaze u raznim pravcima zbog različitog znaka naelktrisanja.

Vreme života pozitrona je, kako je to već ranije istaknuto, reda nanosekunde. On praktično čim nastane zahvata najbliži elektron, pri čemu se obrazuju dva gama-kvanta energije od po $0,51\,MeV$, tj. nastaje anihilacija.

20.11 Elektronski zahvat

Elektronski zahvat je pojava da jezgro apsorbuje elektron iz K, L ili M nivoa. Najčešće se ta apsorpcija vrši sa K-nivoa, usled čega proton prelazi u neutron i emituje se neutrino

$$ {}^{1}_{1}p + e^{-} \rightarrow {}^{1}_{o}\, n + {}^{o}_{o}\, \nu. \tag{20.35} $$

Novonastalo jezgro se obično nalazi u pobudjenom stanju. Prelazom u osnovno stanje emituje se gama-kvant.

Opšta šema po kojoj se vrši elektronski zahvat može se prikažati na sledeći način:

$$ {}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\, Y + {}^{o}_{o}\, \nu. \tag{20.36} $$

Elektronski nivoi u atomu sa kojeg je oslobodjen zahvaćeni elekton popunjava se elektronom sa viših nivoa, usled čega nastaje karakteristično rendgensko zračenje.

20.12 Ubrzavanje naelektrisanih čestica

Interakcijom čestica velike energije sa jezgrima atoma pojedinih elemenata objašnjene su mnoge osobine jezagra i elementarnih čestica. Tako je objašnjeno dobijanje većeg broja produkata pri veštačkoj transmutaciji (preobražaju) jezgra. Kako energija čestica koje emituju prirodni radioaktivni izvori ne prelaze $20\,MeV$, mogućnost njihovog korišćenja je u znatnoj meri ograničena. Medjutim, primenom savremenih metoda ubrzavanja naelektrisanih čestica njihova energija može se povećati za nekoliko redova veličine u odnosu na energiju čestica koje emituju prirodni radioaktivni izvori.

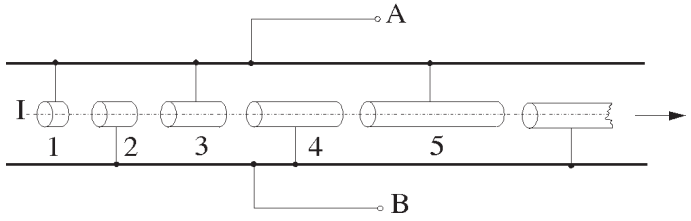
Postoji više uredjaja za ubrzavanje naelektrisanih čestica koji se najčešće nazivaju akceleratori. Ovde će biti obradjene dve vrste ovih uredjaja.

20.12.1 Linearni akceleratori

Za dobijanje naelektrisanih čestica još veće energije nego što daje Van de Grafov generator nužno je da se poveća napon. Izvori konstantnog napona za ovu svrhu nisu najpogodniji. Zato se za ubrzavanje čestica do velikih energija koriste promenjivi naponi. Uredjaji koji koriste promenljive napone su linearni akceleratori i ciklotroni.

Linearni akceleretor kojeg su koristili Sloun (Sloan) i Lorens (Lawence) šematski je predstavljen na slici 20.18. On se sastoji od jedne dugačke cevi u kojoj se nalazi više elektroda u obliku cilindra, čije se ose poklapaju. Neparni cilindri su vezani za jedan pol (A), a parni za drugi pol (B) generatora

visokofrekventnog napona. Na taj način parni i neparni cilindri u svakom trenutku imaju suprotne potencijale. Tako će na primer, u datom poluperiodu oscilovanja svi neparni cilindri biti pozitivni, a parni negativni. U sledećem poluperiodu potencijali će se izmeniti, tako da će neparni cilindri postati negativni, a parni pozitivni. Neka se pozitivni joni iz izvora I kreću s leva na desno duž zajedničke ose cilindra. Ubrzavanje jona vrši se izmedju cilindra. Ako je prvi cilindar na pozitivnom, a drugi na negativnom potencijalu, joni pri napuštanju prvog cilindra bivaju ubrzani. Potom joni ulaze u drugi cilindar i kreću se u njemu konstantnom brzinom koja je veća od početne brzine. Dužina cilindra je tako podešena da potencijal promeni predznak u onom trenutku kada joni stignu na izlaz drugog cilindra. Sada je drugi cilindar na pozitivnom, a treći na negativnom potencijalu, tako da ponovo nastaje ubrzavanje pozitivnih jona. Sukcesivnim povećanjem dužine cilindra, zbog povećanja brzine jona, moguće je da se joni održe tačno u fazi sa promenom preznaka potencijala. Ovo ima za posledicu povećanje energije jona svaki put kad prelaze rastojanje od jednog do drugog cilindra.



Sl. 20.18: Šematski prikaz linearnog akceleratora

Ovaj tip linearnog akceleratora primenjuje se uglavnom za ubrzavanje teških čestica kao što su protoni, deuteroni i alfa-čestice.

Za ubrzavanje elektrona koristi se linearni akcelerator drugačije konstrukcije od onog za ubrzavanje pozitivnih jona, pošto se elektroni, zahvaljujući maloj masi, pri energiji reda $2\,MeV$ kreću brzinom koja je bliska brzini svetlosti. Princip rada ovog akceleratora zasniva se na činjenici da se elektroni mogu prisiliti da putuju sa visokofrekventnim radiotalasima i da preuzimaju energiju od ovih talasa.

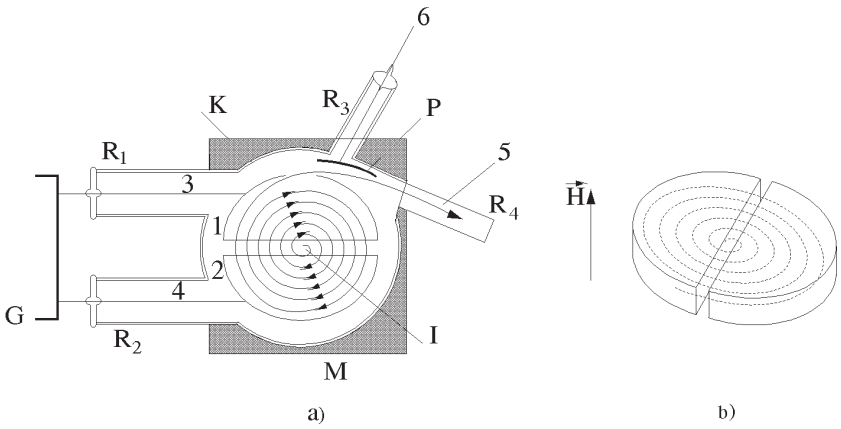
Osnovni deo linearnog akceleratora elektrona je talasovod sa dijafragmama od materijala dobre provodnosti (na primer, bakar prekriven slojem srebra). Talasovod je kružnog poprečnog preseka, a dijafragme imaju kružne otvore. Za dobijanje visokofrekventnih oscilacija u talasovodu najčešće se koristi magnetron. Maksimalna snaga u toku jednog cuklusa (pik) magnetrona, koji se koristi za ove namene, je oko $2\,MeV$, a frekvencija $2998\,MHz$. Talasna dužina sa nekom odredjenom fazom odredjuje se pomoću rastojanja dijafragmi u talasovodu. Elektroni koji ulaze u talasovod sa odredjenom fazom ostaju uvek u fazi sa talasom koji se kreće, pri čemu stalno povećavaju svoju energiju.

Pomoću linearnog akceleratora moguće je istovremeno ubrzati veliki broj elektrona

20.12.2 Ciklotron

Da bi se ubrzale čestice pomoću linearnog akceleratora do velikih energija potreban je veliki broj elektroda što čini ovaj uredjaj veoma glomaznim. Lorens i Livingston (Livingston) su 1932. godine konstruisali novi tip akceleratora za ubrzavanje naelektrisanih čestica, koji se naziva ciklotron. Njegov šematski prikaz dat je na slici 20.19.

Izmedju polova magneta M (deo jednog pola šrafiran na slici 20.19.a) smeštena je vakuumska komora K cilindričnog oblika sa produžecima R_1, R_2, R_3 i R_4. U unutrašnjosti komore nalaze se duanti 1 i 2 koji su posebno prikazani na slici 20.19b. Duanti se izradjuju na taj način što se napravi šuplji cilindar od provodnika, a zatim se raseče na dva dela duž ose cilindra i tako dobijeni delovi razmaknu. Duanti su pomoću provodnika 3 i 4 povezani sa visokofrekventnim generatorom napona G. Izmedju duanata postavlja se izvor čestica I. Naelektrisane čestice emitovane iz izvora počinju da se kreću u električnom polju medju duantima i skreću u magnetnom polju u kome se kreću po krugu zahvaljujući Lorencovoj sili. Poluprečnik kružne putanje r naelektrisane čestice, pri njenoj brzini v, koja je mnogo manja od brzine



Sl. 20.19: Šematski prikaz ciklotrona

svetlosti, može se odrediti iz jednakosti Lorencove i centrifugalne sile, tj.

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \tag{20.37}$$

gde je q naelektrisanje čestice, m masa čestice, v njena brzina i B magnetna indukcija. Iz jednačine (20.37) sledi da je poluprečnik čestice

$$r = \frac{mv}{qB}. \tag{20.38}$$

Brzina čestice po kružnoj putanji (periferna brzina) je povezana sa frekvencijom ν rotacije izrazom

$$v = 2\pi\nu r. \tag{20.39}$$

Iz izraza (20.38) i (20.39) sledi da je

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m}. \tag{20.40}$$

Usled naizmeničnog električnog polja, naelektrisane čestice će se kretati od jednog do drugog duanta što dovodi do njihovog ubrzavanja. Neka izvor I emituje pozitivne jone. Ako je u momentu emisije takvog jona duant 1 na negativnom, a duant 2 na pozitivnom potencijalu, jon će preći u duant 1 krećući se po polukrugu konstantnom brzinom i posle nekog vremena stići će do zazora izmedju duanata. Frekvencija oscilacija visokofrekventnog generatora podešena je tako da se, za vreme dok jon opiše polukrug u duantu 1 i stigne do zazora, na duantima promeni polaritet. To omogućava da se naelektrisana čestica nadje u duantu 2, ali sa većom brzinom nego što je bila u početku kretanja, zbog čega će kružna putanja u duantu 2 pod uticajem magnetnog polja imati veći poluprečnik r, što proizilazi iz izraza (20.38).

Jedna od važnih osobina ciklotrona je da vreme koje je potrebno da naelektrisana čestica predje datu polukružnu putanju ne zavisi od brzine čestice i poluprečnika odvojeno. Prema tome, porast dužine putanje zbog većeg poluprečnika se kompenzuje porastom brzine čestice. Dužina putanje koju predje jon u jednom duantu je πr dok je vreme T za prelaženje te putanje brzinom v

$$T = \frac{\pi r}{v}. \tag{20.41}$$

Iz izraza (20.38) i (20.41) sledi da je

$$T = \frac{\pi m}{qB}. \tag{20.42}$$

Prema tome, kada se frekvencija generatora podesi u zavisnosti od prirode čestice i jačine magnetnog polja onda će kretanje biti u fazi sa promenama električnog potencijala na duantima ciklotrona. Čestica će svaki put kada prolazi zazor izmedju duanata 1 i 2 primiti odredjenu energiju zbog promene znaka potencijala na njima. Energija čestice se stalno povećava, pri čemu ona opisuje spiralu u ravni sa sve

većim poluprečnikom. Posle izvesnog vremena jon stiže do periferije duanata. Tada se pomoću ploče za skretanje P, koja je negativno naelektrisana, pozitivno naelektrisana čestica izvodi iz kružne putanje i pravolinijskom putanjom izleće kroz otvor R_4.

Ako je potencijalna razlika na duantima u momentu prelaženja naelektrisane čestice U, a broj prolazaka N, onda je energija koju ona dobija data izrazom

$$E = qNU. \tag{20.43}$$

Ciklotron se koristi za ubrzavanje teških čestica kao što su protoni, deuteroni, alfa-čestice ili joni teških atoma. On je pogodan za ubrzavanje čestica do energija reda $100\,MeV$.

20.12.3 Sinhrociklotron, Sinhrotron i Sinhrofazotron

Kinetička energija E_k naelektrisanih čestica koje se ubrzavaju u ciklotronu može se odrediti ako se u izrazu za kinetičku energiju $E_k = mv^2/2$ za brzinu koristi izraz (20.38). Tada je

$$E_k = \frac{q^2B^2r^2}{2m}. \tag{20.44}$$

Dakle, energija čestice koja se ubrzava u ciklotronu proporcionalana je poluprečniku duanta. Ovo pokazuje da se energija jona može proizvoljno povećavati ako se povećavaju dimenzije duanata. Medjutim, u praksi je to sasvim drugačije, jer se sa povećanjem brzine jona povećava i njegova masa. Usled relativističkog povećanja mase narušva se sinhronizacija rada ciklotrona pošto se sa porastom mase povećava vreme zadržavanja naelektrisane čestice u duantima. Čestica sa izvesnim zakašnjenjem napušta duant, te stiže u zazor izmedju dunata kada je već promenjen polaritet na njima. Stoga, umesto da se ubrzava, ona se usporava. Ovaj nedostatak može se otkloniti ili smanjenjem frekvencije električnog polja ili postepenim povećanjem jačine magnetnog polja.

Uredjaji koji rade na principu smanjenja frekvencije električnog polja (princip modulisane frekvencije) nazivaju se sinhrociklotroni ili fazotroni. Uredjaji koji rade na principu postepenog porasta jačine magnetnog polja nazivaju se sinhrotroni. Postoje uredjaji koji istovremeno koriste i promenu frekvencije električnog polja i promenu jačine magnetnog polja i nazivaju se sinhrofazotroni.

20.13 Nuklearna fisija

Nuklearne reakcije koje su do sada razmatrane nastaju uglavnom tako što jezgro nakon zahvata čestice najpre predje iz osnovnog u pobudjeno stanje, a potom emituje jednu ili dve čestice ili gama kvant i transformiše se u jezgro jednog od susednih elemenata. Prilikom bombardovanja jezgra teških elemenata, kao što su uran, plutonijum i dr., može doći do njihovog cepanja na dva jezgra koja se nazivaju fragmenti, a takodje se emituju neutroni i gama-kvanti. Ova pojava poznata je pod nazivom fisija ili cepanje jezgara. Ovakve nuklearne reakcije mogu se ostvariti bombardovanjem teških jezgara neutronima, protonima, alfa-česticama, deuteronima kao i gama-kvantima.

Fisija je prvi put otkrivena kod urana. Do nje može doći spontano (spontana fisija) i pod dejstvom neutrona. Spontanu fisiju otkrili su Petržak i Flerov kod jezgra $^{238}_{92}$U. Pri spontanoj fisiji jezgro urana se cepa na dva jezgra koja se nalaze blizu sredine periodnog sistema elemenata. Vreme poluraspada jezgra urana u ovom slučaju je $10^{16}\,godina$. I druga teška jezgra, kao što su plutonijum, kalifornijum, fermijim i drugi, vrše spontanu fisiju, a vreme poluraspada je takodje dugo.

Element uran nalazi se u prirodu kao smeša izotopa $^{234}_{92}$U, $^{235}_{92}$U i $^{238}_{92}$U. Ruda urana najviše sadrži izotopa $^{238}_{92}$U i to $99,282\%$, zatim $^{235}_{92}$U $0,712\%$ i $^{234}_{92}$U $0,006\%$. Sva tri izotopa se pod dejstvom neutrona transformišu, ali na različite načine.

Kada se jezgro urana $^{238}_{92}$U bombarduje neutronima ono zahvata jedan neutron i nastaje sledeća reakcija:

$$^{238}_{92}U +^{1}_{o} n \rightarrow^{239}_{92} U \rightarrow^{239}_{93} Np \rightarrow^{239}_{94} Pu \tag{20.45}$$

Vremena poluraspada urana $^{239}_{92}$U i neptunijuma $^{239}_{93}$Np su $23\,min$ i $2,3\,dana$, redom, pri čemu se emituju β^--čestice. Takodje je i plutonijum $^{239}_{94}$Pu β^- radioaktivan, ali mu je vreme poluraspada znatno

duže i iznosi $2,4.10^4$ *godina*. Ovakvim uzastopnim dezintegracijama (raspadima) nastaju prvi članovi transuranskih elemenata, tj. elementi čiji je atomski broj veći od 92.

Prve eksperimente koji su ukazivali na fisiju izveo je Pavle Savić 1938. godine u Laboratoriji Irene i Frederika Ž. Kirija u Parizu. On je posle ozračivanja urana neutronima hemijskom analizom u tom uranu našao lantan kojega ranije nije bilo. Ove rezultate preuzimaju Han (Hahn), Majtner (Meitner) i Štrasman (Strassmann) u Berlinu, a 1939. godine i Fermi (Fermi). Kao što se pokazalo nadjeni lantan je jedan od fragmenata nastalih fisijom urana.

Fisija urana može se postići kako termalnim, tako i brzim neutronima. Fisija termalnim neutronima je dominantna kod $^{235}_{92}$U, a brzim kod urana $^{238}_{92}$U. Izotopi urana $^{233}_{92}$U i plutonijuma $^{239}_{94}$Pu su takodje podložni fisiji pod dejstvom neutrona bilo koje energije, dok se fisija torijuma i protektinujuma može ostvariti samo brzim neutronima.

Kasnija istraživanja pokazala su da fisija može nastati kada se teška jezgra bombarduju i drugim česticama. Tako, na primer, fisija urana i torijuma može nastati pomoću deuterona energije od $9\,MeV$, protona energije od $7\,MeV$ i gama-kvanata energije od $6,3\,MeV$. Proces fisije sa gama-kvantima naziva se fotofisija.

Karakteristična prateća pojava fisije je emisija neutrona. Naime, pri cepanju jezgra, pored ostalog, emituju se i neutroni koji se pod odredjenim uslovima mogu iskoristiti za cepanje ostalih jezgara. Ova pojava je karakteristična, na primer, kod izotopa urana $^{235}_{92}$U i $^{233}_{92}$U kao i kod plutonijuma $^{239}_{94}$Pu.

Proces fisije se odigrava po sledećaoj šemi:

$$ {}^{A}_{Z}X + {}^{1}_{o}n \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y_1 + {}^{A_2}_{Z_2}Y_2 + k\,{}^{1}_{o}n + Q, \tag{20.46} $$

gde su Y_1 i Y_2 fragmenti fisije $Z = Z_1 + Z_2$, $A \approx A_1 + A_2 + k + Q/c^2$, a k predstavlja broj oslobodjenih neutrona u toku fisije jezgra. Prilikom fisije, pored neutrona oslobadja se velika količina energije Q i nekoliko gama-kvanata.

Kada se jezgra urana $^{235}_{92}$U bombarduju termalnim neutronima, oko 15% njih se transformiše u jezgro urana $^{236}_{92}$U sa vremenom poluraspada od $2,4.10^7$ *godina*. Preostali deo jezgara se raspada na dva fragmenta čiji je odnos masenih brojeva različit. Na slici 20.20 prikazana je kriva raspodele fragmenata fisije urana $^{235}_{92}$U. Kao što se sa slike vidi, verovatnoća za nastanak različitih fragmenata fisije kreće se izmedju $0,001\%$ do $6,4\%$. Verovatnoća da se prilikom fisije pojave dva fragmena istih masenih brojeva ($A_1 = A_2 = 118$) je veoma mala i iznosi svega $0,01\%$. Najveću verovatnoću pojavljivanja imaju fragmenti sa masenim brojevima oko 95 i 139.

Fragmenti nastali fisijom su radioaktivni, jer imaju višak neutrona u odnosu na stabilne izotope. Prelazak ovih jezgara u stabilno stanje je praćen emisijom beta-čestica. Kao primer može poslužiti fragment ksenona $^{140}_{54}$Xe koji se često dobija prilikom raspada urana $^{235}_{92}$U

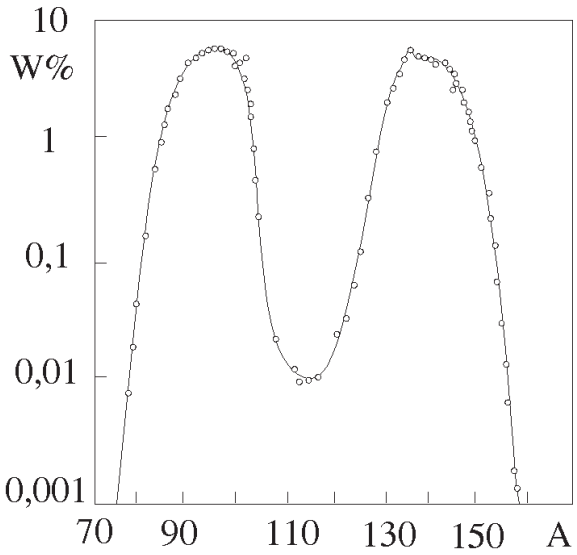
$$ {}^{140}_{54}Xe \rightarrow {}^{140}_{55}Cs \rightarrow {}^{140}_{56}Ba \rightarrow {}^{140}_{57}La \rightarrow {}^{140}_{58}Ce. \tag{20.47} $$

Vremena poluraspada jezgara $^{140}_{54}$Xe, $^{140}_{55}$Cs, $^{140}_{56}$Ba i $^{140}_{57}$La su $14\,s$, $64\,s$, $13\,dana$ i $40\,h$, redom, dok je jezgro $^{140}_{58}$Ce stabilno.

Broj oslobodjenih neutrona prilikom fisije kod istih jezgara može biti različito, tj. jedno jezgro može emitovati jedan neutron, a drugo dva, tri, pa čak i više neutrona, tako da srednja vrednost ne daje ceo broj neutrona. U tabeli 20.3 date su srednje vrednosti za broj neutrona koje emituju neka jezgra pri fisiji termalnim neutronima.

Tabela 20.3: Srednji broj neutrona emitovanih pri fisiji urana i plutonijuma

Jezgro	Srednja vrednost broja emitovanih neutrona
$^{235}_{92}U$	2,47
$^{233}_{92}U$	2,55
$^{239}_{94}Pu$	2,91



Sl. 20.20: Raspodela fragmenata fisije jezgra izotopa urana $^{235}_{92}$U po masenim brojevima. Na ordinatnoj osi data je verovatnoća W pojavljivanja fragmenta

Oko 99% neutrona prilikom fisije oslobadja se u veoma malom vremenskom intervalu, reda $10^{-14}\,s$ nakon fisije. Ovi neutroni nazivaju se trenutni neutroni. Takodje, jedan broj neutrona se emituje pošto se proces fisije završi. To su zakasneli ili naknadni neutroni. Ovi neutroni mogu se detektovati i nekoliko minuta nakon prestanka fisije. Tako, na primer, pri fisiji plutonijuma $^{234}_{94}$Pu termalnim neutronima oko $0,36\%$ proizvedenih neutrona su naknadni neutroni, a kod urana $^{235}_{92}$U oko $0,26\%$.

Kao što je već navedeno, pri fisiji jezgro gubi energiju. Naime, fragmenti i oslobodjeni neutroni odnose sa sobom kinetičku energiju, a deo energije se oslobadja u daljim procesima beta i gama-raspada. Ova energija za izotop urana $^{235}_{92}$U se u srednjem rasporedjuje na način prikazan u tabeli 20.4.

Tabela 20.4: Raspodela ukupne oslobodjene energije za izotop urana $^{235}_{92}$U

Oblik energije	Energija (MeV)
Kinetička energija fragmenata	160
Energija gama zračenja pri fisiji	8
Kinetička energija neutrona emitovanih pri fisiji	6
Energija radioaktivnog raspada fragmenata	21

Zbir energija ovih procesa daje ukupnu energiju koja se oslobadja tokom fisije i ona iznosi $195\,MeV$.

20.14 Lančana nuklearna reakcija

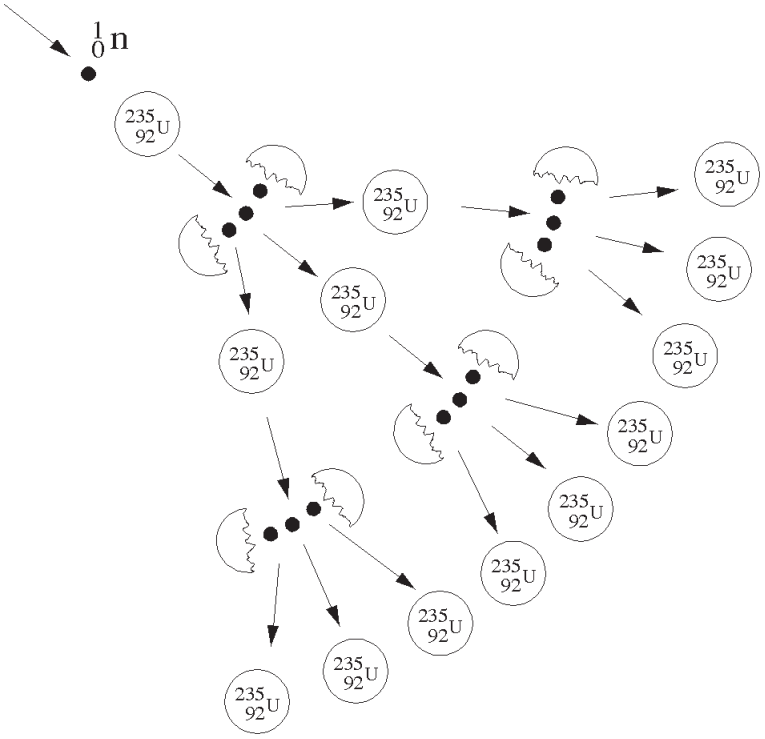
Pošto se pri fisiji jezgra oslobadjaju neutroni, oni mogu da izazovu fisiju novih jezgara tako da nastaje samoodržavajuća fisija koja se naziva lančana nuklearna reakcija. Ovaj tip nuklearne reakcije je egzotermni, tj. praćen je oslobadjanjem velike količine energije. Na primer, energija koja se oslobodi pri fisiji urana $^{235}_{92}$U mase od $1\,g$ iznosi oko $10^{11}\,J$ ili $20\,MWh$. Ova energija je oko 10^6 puta veća od energije koja se oslobodi pri sagorevanju $1\,kg$ uglja.

Šematski prikaz lančane reakcije dat je na slici 20.21. Ovu reakciju otežavaju izvesni procesi. Naime, sve neutrone ne zahvataju jezgra fisionog materijala. Pored fisionog materijala prisutni su i drugi materijali koji nisu u mogućnosti da dožive fisiju zahvatom neutrona. Takodje, jedan broj neutrona napušta oblast u kojoj se nalazi fisioni materijal tako da su oni izgubljeni za fisiju. Svi neutroni koji zahvataju jezgra fisionih materijala ne uspevaju da izazovu fisiju. Viška primljene energije od neutrona jezgro se

može osloboditi, na primer, emisijom gama-kvanta.

Za karakterisanje lančane nuklearne reakcije koristi se faktor multiplikacije ili koeficijent umnožavanja k. On se definiše kao količnik broja neutrona naredne N_2 i prethodne N_1 generacije. Faktor multiplikacije može se izraziti na sledeći način:

$$k = \epsilon p f \eta. \tag{20.48}$$



Sl. 20.21: Lančana nuklearna reakcija urana $^{235}_{92}$U

Koeficijent ϵ uključuje mogućnost da brzi neutron, nastao fisijom bude zahvaćen u jezgro i izazove fisiju pre nego što se uspori. Koeficijent p uključuje u račun pojavu da se brzi neutroni pri fisiji moraju usporiti kako bi ih zahvataila jezgra. Svi neutroni nisu u mogućnosti da se uspore pre sudara sa jezgrima urana ili drugog fisionog materijala koji koristi termalne neutrone. Prema tome, koeficijent p predstavlja verovatnoću da se oslobodjeni neutron uspori pre fisije. Koeficijent f naziva se steprn iskorišćenja termalnih neutrona. On predstavlja odnos izmedju zahvaćenih termalnih neutrona u uranu i ukupnog broja neutrona zahvaćenih od strane nečistoća, zidova komore itd. Koeficijent η definiše proces nuklearne fisije i na njega se ne može delovati.

Lančana reakcija se povećava kada je koeficijent multiplikacije $k > 1$. Da bi ovo bilo ispunjeno, potrebno je da se podese takvi uslovi da svi koeficijenti u (20.48) budu veći od jedinice. Moguće je podešavati samo koeficijente ϵ, p i f. Da bi se povećala vrednost koeficijenta f potrebno je da se iz zone fisije uklone svi materijali koji značajnije apsorbuju termalne neutrone. Za njihovo usporavanje potrebno je da se koriste materijali koji efikasno usporavaju neutrone, a veoma ih slabo apsorbuju. Takvi materijali su deuterijum (u teškoj vodi), grafit i berilijum.

Koeficijent p se podešava izborom čistoće urana i konstrukcijom komore u kojoj se fisioni materijal nalazi. Koeficijenti p i f se povećavaju povećanjem koncentracije izotopa urana $^{235}_{92}$U u prirodnom uranu.

Faktor multiplikacije k, pored prirode fisionog materijala, zavisi i od njegove mase i od dimenzija i oblika aktivne zone. Minimalne dimenzije aktivne zone u kojoj može nastati lančana nuklearna reakcija nazivaju se kritične dimenzije. Minimalna masa fisionog materijala koja se nalazi u aktivnoj zoni kritičnih dimenzija, neophodna za pojavau lančane reakcije, naziva se kritična masa.

Neka je τ srednji vremenski interval od početka fisije pa do zahvata sekundarnih neutrona oslobodjenih u procesu fisije, a N broj neutrona u odredjenoj generaciji neutrona. U sledećoj generaciji njihov broj je

jednak kN. Povećanje broja neutrona za jednu generaciju je

$$dN = kN - N = N(k-1), \tag{20.49}$$

a promena broja neutrona u jedinici vremena:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{\tau}, \tag{20.50}$$

ili posle intergracije

$$N = N_o \exp(\frac{k-1}{\tau}t), \tag{20.51}$$

gde je N_o broj neutrona u početku posmatranja (t=0), a N njihov broj posle vremena t. Broj neutrona je odredjen vrednošću $k-1$. Ako je $k > 1$ broj neutrona raste nakon svake sledeće generacije, te može da nastupi eksplozivna lančana reakcija. Ako je $k = 1$ lančana reakcija se održava, a ako je $k < 1$ ona se prigušuje.

20.15 Nuklearna fuzija

Velika količina energije može se osloboditi ne samo pri fisiji teških jezgara, već i pri spajanju (sintezi) lakih jezgara u jezgro veće atomske mase. Ovaj proces je poznat pod nazivom nuklearna fuzija. Da bi se ostvarila fuzija potrebno je da se savladaju odbojne elektrostatičke sile izmedju jezgara koja učestvuju u ovom procesu. To zahteva da se jezgra nadju na takvim rastojanjima na kojima su privlačne nuklearne sile veće od odbojnih elektrostatičkih sila. Ta rastojanja su reda $10^{-15}\,m$. Da bi se savladale odbojne elektrostatičke sile, jezgra koja se spajaju moraju da imaju velike energije, odnosno brzine, da bi se približila na ova rastojanja. Proces fuzije može se ostvariti na dva načina i to ubrzanjem jezgara pomoću akceleratora ili njihovim zagrevanjem do visokih temperatura.

Poznato je da visina potencijalne barijere za dva jezgra vodonika iznosi oko $0,9\,MeV$. Prema tome, moglo bi se očekuvati da bombardovanjem materijala koji sadrži atome vodonika protonima energije oko $1\,MeV$ može osloboditi energija na račun njihovog spajanja u jezgro veće atomske mase. Ovakav proces je malo verovatan, jer su sudari sa jezgrima veoma retki. Presek za ovu vrstu reakcije je reda $10^{-28}\,m^2$. Mnogo je verovatniji proces da proton iz ubrzanog snopa izazove jonizaciju ili pobudjivanje atoma vodonika. Presek za ove procese je oko $10^{-20}\,m^2$. Usled gubitka energije na jonizaciju i pobudjivanje proton nije u stanju da savlada potencijalnu barijeru jezgra atoma vodonika kao mete i izazove fuziju.

Fuzija vodonikovih jezgara kao i jezgara drugih lakih elemenata je moguća samo ako se uklone procesi jonizacije i pobudjivanja atoma. To se postiže uklanjanjem svih elektrona iz atomskog omotača. Tako, na primer, na temperaturi od $2.10^5\,K$ atomi vodonika se u potpunosti jonizuju, tj. na ovoj temperaturi gas se sastoji od slobodnih protona i elektrona. Pošto su srednje energije protona i elektrona jednake, to se pri njihovom medjusobnom sudaru one ne menjaju. Ovakvo stanje materijala naziva se visokotemperaturna plazma. Pošto je broj protona jednak broju elektrona u bilo kom delu posmatrane zapremine ovakve plazme, srednja gustina naelektrisanja je jednaka nuli. Verovatnoća da se sudarom protona i elektrona u visokotemperaturnoj plazmi obrazuje neutralan atom vodonika je mala tako da se može zanemariti.

Pri prolasku protona energije oko $1\,MeV$ kroz visokotemperaturnu plazmu postoji uslov za proces fuzije koja je poznata pod nazivom termonuklearna fuzija. Fuzija se može postići i pri nižim energijama protona zahvaljujući pojavi tunel efekta.

Fuzija lakih jezgara u jezgro sa većom atomskom masom praćena je oslobadjanjem velike količine energjije. Kao primer mogu da posluže sledeće reakcije

$$\begin{aligned}
{}^2_1H + {}^2_1H &\rightarrow {}^3_1H + {}^1_1p + 4MeV \\
{}^2_1H + {}^2_1H &\rightarrow {}^3_2He + {}^1_on + 3,3MeV \\
{}^2_1H + {}^3_1H &\rightarrow {}^4_2He + {}^1_on + 17,6MeV \\
{}^2_1H + {}^6_3Li &\rightarrow {}^4_2He + {}^4_2He + 22,4MeV
\end{aligned} \tag{20.52}$$

Oslobodjena energija po nukleonu pri fuziji je znatno veća od one koja se oslobadja pri fisiji teških jezgara. Energija koja se oslobodi pri fisiji jezgra urana $^{235}_{92}$U, kao što je već navedeno, iznosi $195\,MeV$ gde na jedan nukleon otpada približno $0,82\,MeV$. Pri fuziji deuterijuma i tricijuma, kao što se vidi iz reakcija (20.53), energija koja otpada na jedan nukleon iznosi $17,6/5 \approx 3,5\,MeV$.

Pretpostavlja se da termonuklearne reakcije predstavljaju jedan od izvora energije Sunca i zvezda i da se odigravaju na dva načina. Prvi je poznat pod nazivom proton-protonski ciklus koji je dominantan na temperaturi od $10^7\,K$. Po ovom ciklusu proces fuzije se odigrava po sledećim reakcijama:

$$\begin{aligned} {}^1_1p + {}^1_1 p &\rightarrow {}^2_1 H + \beta^+ + {}^o_o \nu \\ {}^2_1H + {}^1_1 p &\rightarrow {}^3_2 He + \gamma \\ {}^3_2He + {}^3_2 He &\rightarrow {}^4_2 He + 2{}^1_1p \end{aligned} \tag{20.53}$$

Drugi tip reakcija poznat je pod nazivom ugljenik-azotni ili ugljenikov ciklus. Po ovom ciklusu proces fuzije se odigrava na sledeći način:

$$\begin{aligned} {}^{12}_6C + {}^1_1 p &\rightarrow {}^{13}_7 N + \gamma \\ {}^{13}_7N &\rightarrow {}^{13}_6 C + \beta^+ + {}^o_o \nu \\ {}^{13}_6C + {}^1_1 p &\rightarrow {}^{14}_7 N + \gamma \\ {}^{14}_7N + {}^1_1 p &\rightarrow {}^{15}_8 O + \gamma \\ {}^{15}_8O &\rightarrow {}^{15}_7 N + \beta^+ + {}^o_o \nu \\ {}^{15}_7N + {}^1_1 p &\rightarrow {}^{12}_6 C + {}^4_2 He \end{aligned} \tag{20.54}$$

Kao rezultat ovog ciklusa je transformacija četiri protona u jedno jezgro helijuma, pri čemu se oslobadja energija od $26,7\,MeV$. Jezgro ugljenika se ne menja i u reakcijama ima ulogu katalizatora. Naime, jezgro ugljenika $^{12}_6$C je ponovo sposobno da u interakciji sa protonom započne isti ciklus.

Pri temperaturama većim od $2.10^7\,K$ dolazi do fuzije jezgara čiji su meseni brojevi veći od masenog broja vodonika. Tako, na primer, na temperaturama većim od $10^8\,K$ počinje proces fuzije jezgra helijuma. Pri temperaturama od 5.10^8 do $10^9\,K$ dolazi do fuzije ugljenika i kiseonika.

Treba istaći da je za dobijanje korisne energije potrebno koristiti takve reakcije fuzije koje se mogu kontrolisati. Za ove svrhe najpogodnije reakcije su (20.53), jer daju veliku količinu energije po nukleonu. Računskim putem je pokazano da se tek pri temperaturama većim od $3,5.10^8\,K$ dobija u procesima fuzije deuterona više energije nego što se iz plazme gubi elektromagnetnim zračenjem. Pri ovoj temperaturi fuzija postaje samoodržavajuća i oslobodjena energija u ovom slučaju može se pretvoriti u druge oblike energije koji su pogodni za korišćenje.